UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

Fernanda Carla de Oliveira
Karla Katrine Pereira Cazarotto
Nadya Beatriz Antunes Barroso

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

CASCAVEL
2021

Fernanda Carla de Oliveira
Karla Katrine Pereira Cazarotto
Nadya Beatriz Antunes Barroso

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.

Orientadora: Profa. Ms. Pamela Gonçalves.

CASCAVEL
2021

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este relatório final da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio supervisionado II, contém uma descrição dos momentos nos quais estivemos exercendo a prática docente no ano de 2021 em um projeto de ensino. Nosso exercício de prática ocorreu em dois momentos distintos: no primeiro semestre, estivemos envolvidos na preparação das aulas e no segundo semestre executamos as aulas no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque a Área de Matemática – PROMAT.

No ano de 2020, foi decretado a suspensão de atividades e aulas presencias em decorrência da pandemia do Covid – 19, logo o PROMAT, que era um programa presencial, não foi ofertado. Neste mesmo ano, iniciamos a preparação provisória das atividades do PROMAT, pois não sabíamos como seria o retorno das atividades presenciais no estado do Paraná por consequência da situação mundial de pandemia. Planejamos, ao todo dez planos de aula com os conteúdos relacionados ao Ensino Médio. Sem resposta para à volta das atividades, as aulas do programa foram adiadas para o ano de 2021. Em sua edição de 2021, precisou ser adaptado para as aulas remotas e síncronas, permitindo assim, que alunos de vários estados do Brasil passassem a ter acesso a esse curso.

No ano de 2021, as aulas da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino retornaram e a preparação para o PROMAT 2021 se iniciaram. Adaptamos os planos de aula desenvolvidos no ano anterior para a modalidade remota, pois as atividades foram propostas e pensadas para um desenvolvimento de forma presencial, e passariam a desenvolvidas na forma remota.

A sequência das atividades foi determinada em sala de aula, em uma decisão conjunta entre nós e nossa turma (alunos do 4° ano) e os professores orientadores da disciplina do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste/*Campus* Cascavel-PR.

Foram programados nove encontros dividos em três módulos de três encontros de duas horas e trinta minutos de duração cada: I – Trigonometria (Seno, cosseno, tangente no triângulo retângulo; circunferência; tipos de funções, domínio e imagem, período e função (seno, cosseno, tangente, arcos, ângulos, unidades de medidas dos ângulos); relações e funções trigonométricas); II - Geometria analítica (coordenadas cartesianas no plano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, pontos colineares equação geral e reduzida da reta, posições relativas entre duas retas no plano; equação geral e reduzida da circunferência, posições relativas envolvendo ponto, circunferência e reta); III – Análise Combinatória (princípio fundamental da contagem; permutação, arranjo e combinação; probabilidade).

As inscrições para o PROMAT iniciaram dia 17/05/2021 pelo *site* do curso de Matemática da Unioeste e finalizaram no dia 27/05/2021. As informações e inscrições foram divulgadas por todos os alunos e professores da disciplina por meio de redes sociais, possibilitando pessoas de todos os lugares do país participarem do curso. Ao todo, o PROMAT recebeu 92 inscrições sendo distribuídos em 4 grupos.

As aulas foram programadas pelo período de 29/05/2021 a 30/07/2021 e transmitidas pela plataforma *Jitsi* e, diferente de todos os anos, tivemos um foco especial nos vestibulares, principalmente nas provas da Unioeste, e não tanto no ENEM.

Como foi o primeiro ano de PROMAT *on-line*, tivemos muitas dúvidas de como iria ser o processo, se seria mais prático e fácil ou mais complicado e trabalhoso. Precisamos fazer várias adaptações extremamente necessárias, pois no momento que estamos passando, muitas medidas de proteção foram remodeladas para dar continuidade nas atividades educativas e também viver em sociedade.

Durante as aulas, procuramos trazer novas tecnologias educacionais para transformar a aula teórica em uma pratica *on-line*. O objetivo desse relatório é mostrar todos os planejamentos das atividades, relatos da prática docente e deixar exposto os pontos positivos e negativos do primeiro PROMAT de forma remota.

Assim, esse relatório está estruturado em: apresentação do PROMAT, opção metodológica, cronograma das atividades, os planos de aula e respectivos relatos e reflexões sobre momentos experienciados, e depois as considerações finais sobre o processo de execução deste projeto.

2. PROMAT

O Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque a Área de Matemática, ou PROMAT, é um projeto desenvolvido por estudantes do curso de graduação Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), campus Cascavel.

Seu público-alvo são estudantes da rede pública de ensino da região de Cascavel, com prioridade para alunos matriculados no último ano do Ensino Médio, mas durante o ano de 2021, o PROMAT foi realizado totalmente *on-line*, o que oportunizou estudantes de outros estados do Brasil a participarem. O projeto é realizado com o objetivo de ajudar e incentivar os alunos a ingressarem em um ensino superior e sanar as dúvidas no conhecimento da matemática básica.

2.1. Opção Teórica e Metodológica

Para a metodologia do PROMAT utilizamos aulas expositivas e dinâmicas. Utilização de novas tecnologias, investigação matemática e resolução de problemas. Para a criação de lista de exercícios, focalizamos em questões do vestibular da Unioeste, seguindo o intuito do programa. A utilização de novas tecnologias para o desenvolvimento das aulas foi primordial, pois em uma sala de aula remota as aulas práticas foram adaptadas para que alunos de todos os lugares participassem.

> A modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorra com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com pessoal qualificado, com políticas de acesso, com acompanhamento e avaliação compatíveis, entre outros, e desenvolva atividades educativas por estudantes e profissionais da educação que estejam em lugares e tempos diversos. (BRASIL, 2017, p. 1).

Como recursos metodológicos, utilizamos *slides* e plataformas interativas, para que os alunos não ficassem dispersos durante as aulas e tivessem participação ativa. Também incluímos competições e desafios semanais para aplicação e motivação para a resolução das atividades.

3. CRONOGRAMA

Encontro	Data	Conteúdo
1	29/05/2021	Relações trigonométricas no triângulo retângulo.
2	12/06/2021	Arcos, ângulos, unidades de medidas dos ângulos e circunferência.
3	19/06/2021	Relações e funções trigonométricas.
4	26/06/2021	Geometria analítica: estudo do ponto.
5	03/07/2021	Equação geral e reduzida da reta, posições relativas entre duas retas no plano
6	10/07/2021	Geometria analítica: estudo da circunferência.
7	17/07/2021	Análise combinatória: Princípio Fundamental da Contagem, permutação.
8	24/07/2021	Análise Combinatória (arranjo e combinação) e Probabilidade (eventos aleatórios, independentes, equiprováveis e não equiprováveis, união e interseção de eventos).
9	31/07/2021	Trigonometria (triângulo retângulo, circunferência e funções), Geometria Analítica (ponto, reta e circunferência), Análise Combinatória (permutação, arranjo e combinação) e Probabilidade (eventos aleatórios, independentes, equiprováveis e não equiprováveis, união e interseção de eventos).

4. MÓDULO I

4.1 Encontro I

4.1.1. Plano de aula

PLANO DE AULA - 1º ENCONTRO

(29/05/2021)

Público-Alvo:

Educandos inscritos no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT).

Tempo de execução:

2 horas e 30 minutos.

Conteúdo:

Relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Objetivo Geral:

Espera-se que, por meio das aulas ministradas, os alunos mostrem-se capazes de:

- Solucionar problemas envolvendo as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Objetivos Específicos:

Mediante a execução de aulas pautadas na resolução de problemas, bem como na participação ativa dos discentes, objetiva-se que os educandos se apresentem aptos a:

- Identificar as relações trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente), aplicando-as corretamente em situações problemas;
- Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de exercícios;
- Compreender e empregar as leis dos senos e dos cossenos nos exercícios solicitados.
- Identificar e usar corretamente as relações: seno, cosseno e tangente.

Recursos Didáticos:

Caneta, lápis, borracha, lista de exercícios, *slides*, mapa mental, formulários *on-line* para avaliação e controle de frequência, plataformas *Wordwall*, *SurveyMonkey* e *Mentimeter*, *software GeoGebra*.

Encaminhamento metodológico:

Com a finalidade de atingir os objetivos supracitados, serão desenvolvidas as seguintes atividades:

1. (10 minutos) Realização da dinâmica de apresentação, conforme os passos descritos abaixo.

Quadro 1- Dinâmica

<u>Roleta de Perguntas</u>
Materiais: Computador com acesso à internet e lista contendo o nome dos educandos. **Execução:** Com o auxílio da plataforma *Wordwall*[1], que disponibiliza uma roleta para sorteios aleatórios, as docentes deverão selecionar o nome de um aluno, juntamente com uma pergunta a ser respondida por ele. O mesmo deve ser feito até que todos tenham participado. Assim, além de apresentarem-se, os educandos poderão contar um pouco sobre si, de forma descontraída. Abaixo, seguem as perguntas a serem utilizadas. 1. Se você pudesse dominar uma habilidade que não tem agora, qual seria? 2. Se todos os trabalhos pagassem exatamente o mesmo salário, com o que você gostaria de trabalhar? 3. Qual seria a aventura mais incrível de viver? 4. O que mais toma o seu tempo? 5. Se você tivesse uma bola de cristal e pudesse descobrir uma coisa sobre o futuro da sua vida, o que seria?

[1]Disponível em: https://wordwall.net/pt/resource/16807715. Acesso em: 12 abr. 2021.

6. Qual o mais distante que você já esteve de casa?
7. Qual lugar você mais gostaria de ir na vida?
8. Qual canal de TV que não existe, mas deveria?
9. Se você pudesse fazer uma regra que todos tivessem que seguir, qual seria essa regra?
10. Quando foi a última vez que você subiu em uma árvore?
11. Qual a experiência mais incrível que você já teve na vida?
12. O que você acha que todos deveriam fazer pelo menos uma vez na vida?
13. Como você descreveria a si mesmo?
14. Qual o melhor dia do ano?
15. Qual o melhor livro que você já leu?
16. Quais animais de estimação você já teve?
17. Quais músicas você já memorizou completamente?
18. Qual foi a última coisa que você conseguiu de graça?
19. Qual a melhor forma de começar o dia?
20. Se hoje fosse o seu último dia no seu país, o que você gostaria de fazer?
21. O que você aprendeu de mais útil na escola?
22. Qual filme merece uma sequência?
23. Quais programas de tv ou séries você gosta de assistir?
24. Você mudaria o seu nome? Se sim, qual escolheria?
25. Quantos anos você teria se não soubesse quantos anos tem?
26. Se você pudesse inventar, uma coisa o que seria e por quê?
27. Qual coisa bacana que você já fez que não tinha ninguém pra ver?
28. Quais as suas regras pessoais que nunca quebra?
29. O que você achou que fosse ser quando crescesse, mas acabou não sendo?
30. Qual o seu gênero favorito de música e livro?
31. Se você pudesse ter um sotaque, qual seria?
32. Qual foi a última pessoa para quem você mandou mensagem?
33. Qual foi a última coisa que você pesquisou no Google?
34. Se você tivesse que ouvir só mais uma música pro resto da vida, qual escolheria?
35. Qual era seu apelido na infância?
36. O que você faria se ficasse invisível por 24h?
37. Defina seu dia em apenas uma palavra?
38. Se pudesse viajar agora para outro lugar, onde você gostaria de estar?
39. Um vídeo que você ri muito quando vê.
40. Defina seu gosto musical em três palavras.
41. Quais são suas principais metas na vida?
42. Qual o sonho mais esquisito que já teve?
43. Quem mais conhece você?

Fonte: Mariana Lapeloso (2021).

Figura 1- *Wordwall*

Fonte: *Wordwall*.

2. (10 minutos) Iniciaremos o conteúdo com a definição de trigonometria no triângulo retângulo e do teorema de Pitágoras.

Quadro 2- Trigonometria

Trigonometria

Trigonometria significa o estudo da matemática que estabelece os métodos de resolução dos triângulos e investiga as funções trigonométricas.

O significado da palavra **trigonometria**, vem do grego e resulta da conjunção de três palavras:

Tri – três

Gonía – ângulo

Métron – medir

Triângulo retângulo é todo triângulo que apresenta um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90°.

Figura 2 - Triangulo Retângulo

Fonte: Acervo das autoras.

Teorema de Pitágoras

Em todo **triângulo retângulo**, **o** quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Figura 3- Triangulo retângulo

$$HIPOTENUSA^2 = CATETO\ OPOSTO^2 + CATETO\ ADJACENTE^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Fonte: Acervo das autoras.

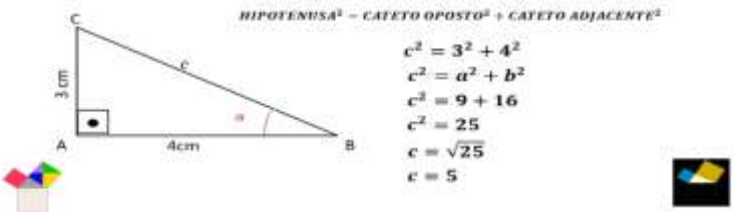
Figura 4- Teorema de Pitágoras

Fonte: Matematica,pt, 2021[2]

Exemplo de aplicação do Teorema de Pitágoras.

Calcule o valor de c:

Figura 5- Exemplo teorema de Pitágoras.



Fonte: Acervo das autoras.

3. (10 minutos) Apresentação do exercício a seguir, a fim de que, após a leitura por parte das docentes, os alunos passem a solucioná-los individualmente, empregando o Teorema de Pitágoras;

3.1. Correção da atividade, partindo da resolução coletiva. Essa resolução, assim como as subsequentes, deverá ser realizada por meio dos *slides* para a formulação da resposta ao vivo, na presença dos estudantes.

Quadro 3- Exercícios

O famoso caso do bambu quebrado
Um bambu com 1 *zhang* de altura partiu-se, e a parte de cima toca o chão à 3 *chih* da base do bambu. Qual é a altura de quebra? (Nota: 1 *zhang* = 10 *chih*) No século XII, o matemático hindu Bhaskara publicou o mesmo problema assim: "Se um bambu de 32 cúbitos de altura é quebrado pelo vento de modo que a ponta encontra o chão a 16 cúbitos da base, a que altura a partir do chão ele foi quebrado?". **Resolução:** $(32-h)^2 = h^2 + 16^2$ $1024 - 64h - h^2 = h^2 + 256$ $-64\,h = -768$

[2] Disponível em: https://www.matematica.pt/faq/teorema-pitagoras.php

$$h = \frac{768}{64}$$
$$h = 12$$

Fonte: Jose Marmontel (2021).

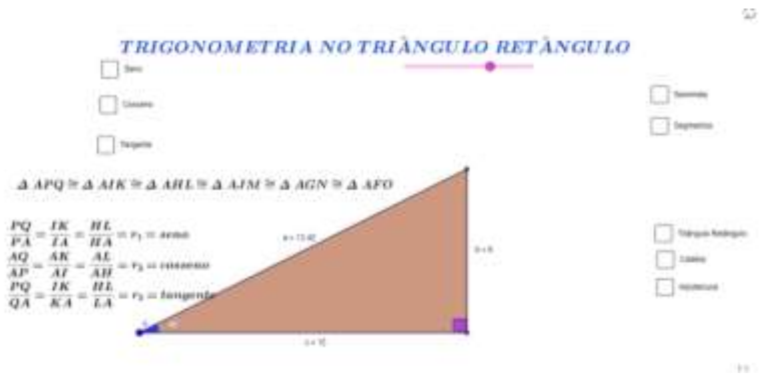
4. (15 minutos) Construção das relações trigonométricas no triângulo retângulo a partir da exibição de um dos materiais didáticos[3] disponibilizados no *software* GeoGebra. Por meio do compartilhamento de tela, as docentes realizarão a manipulação deste, a fim de que os estudantes verifiquem as relações seno, cosseno e tangente;

Quadro 4 - Construção GeoGebra I

Passos da construção

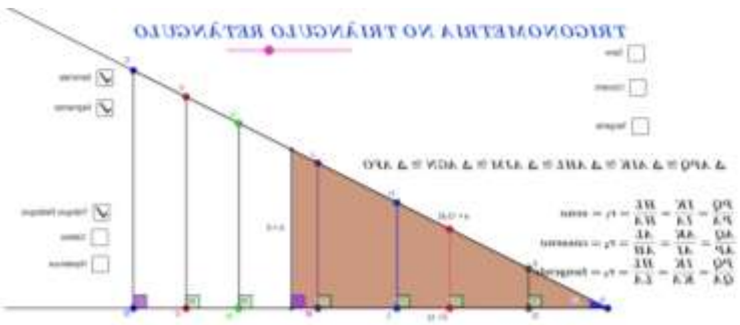
Inicialmente, ao acessar o material, as docentes exibirão, aos docentes, a seguinte tela:

Figura 6 - Construção Geogebra I



Clicando nas opções *semirreta*, *segmento* e *triângulo retângulo*, será possível construir triângulos semelhantes ao anteriormente dado. Assim, a partir das razões entre os lados dos triângulos, as razões trigonométricas deverão ser enunciadas.

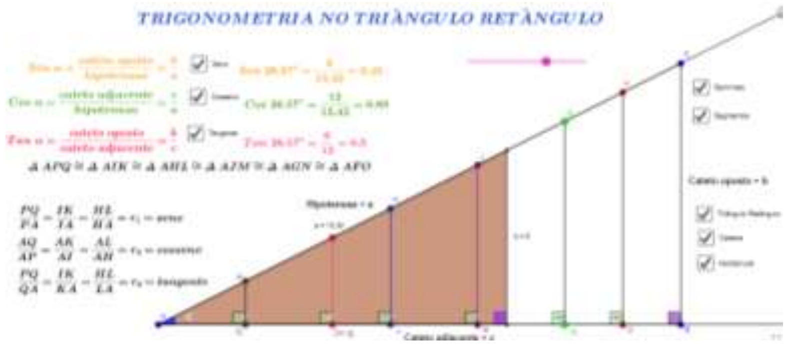
Figura 7- Construção Geogebra II



Para verificar os valores correspondentes aos senos, cosseno e tangente do primeiro triângulo dado (alaranjado), será necessário clicar nas opções: *catetos*, *hipotenusa*, *seno*, *cosseno* e *tangente*.

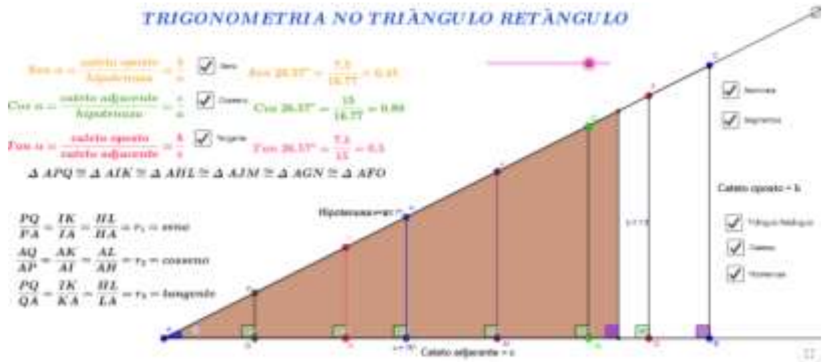
[3] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ga8JkrZh. Acesso em: 13 abr. 2021.

Figura 8 - Construção GeoGebra III



Do mesmo modo, ao rolar o controle deslizante em rosa, o material realizará o cálculo das relações trigonométricas para os demais triângulos construídos, a fim de demonstrar que os valores do seno, cosseno e tangente não se alteram.

Figura 9- Construção GeoGebra IV



Fonte: Anderson Moura (2021).

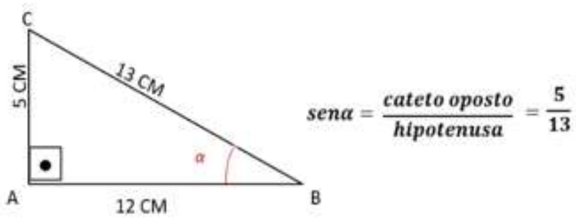
5. (10 minutos) Após, demonstraremos por meio dos *slides* alguns exemplos de exercícios utilizando as razões trigonométricas no triangulo retângulo do seno, cosseno e tangente.

Quadro 5 - Relações Trigonométricas num triângulo retângulo

Relações Trigonométricas num triângulo retângulo

Seno:

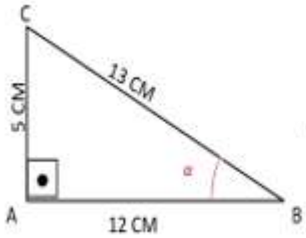
Figura 10- Relações trigonométricas seno



Fonte: Acervo das autoras.

Cosseno:

Figura 11- Relações trigonométricas cosseno

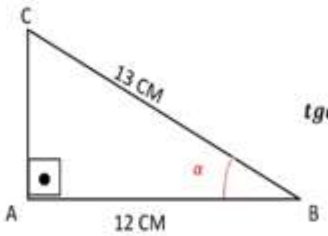


$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{12}{13}$$

Fonte: Acervo das autoras.

Tangente:

Figura 12 - Relações trigonométricas Tangente



$$tg\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{5}{12}$$

.

Fonte: Acervo das autoras.

6. (10 minutos) Demonstraremos por meio do quadro o cálculo das razões trigonométricas do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º. Objetiva-se que os alunos compreendam como obter esses valores e não somente decorem a tabela.

Quadro 6 - Ângulos notáveis

Ângulos notáveis

Figura 13 - Ângulos notáveis

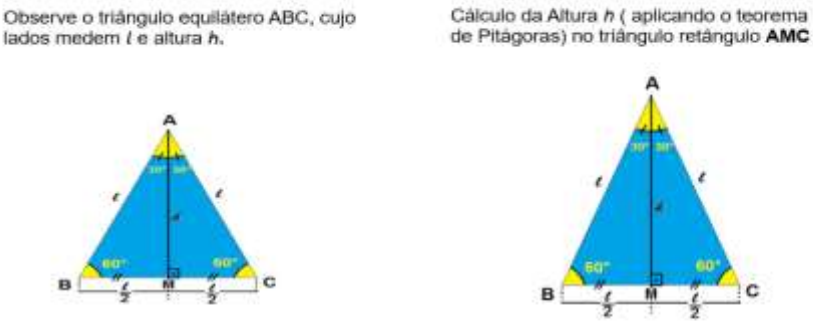


Figura 14 – Cálculo do seno, cosseno e tangente ângulos 30° e 60°

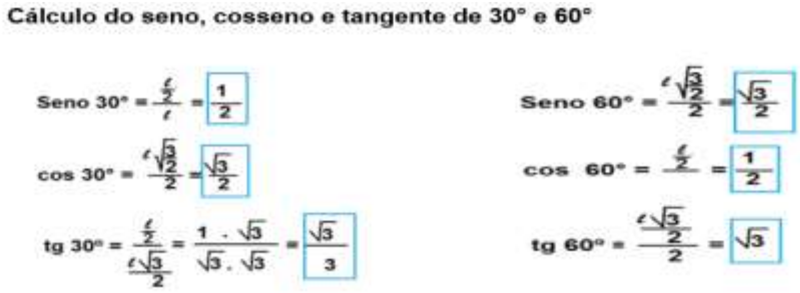
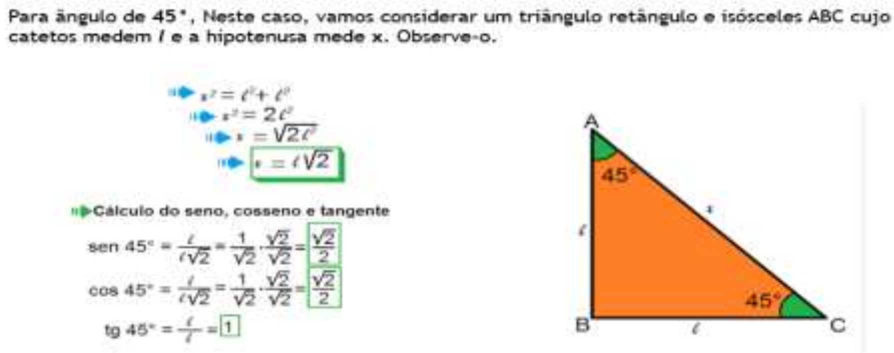


Figura 15 - Cálculo do seno, cosseno e tangente ângulo de 45°



Fonte: Dever de casa, 2021[4]

Figura 16 - Tabela ângulos notáveis

	30°	45°	60°
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSSENO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Acervo dos autores.

7. (10 minutos) Realizaremos o primeiro exercício, dispondo de 5 minutos para os alunos resolverem, após corrigiremos o exercício, sanando possíveis questionamentos que os alunos possam ter no decorrer da resolução.

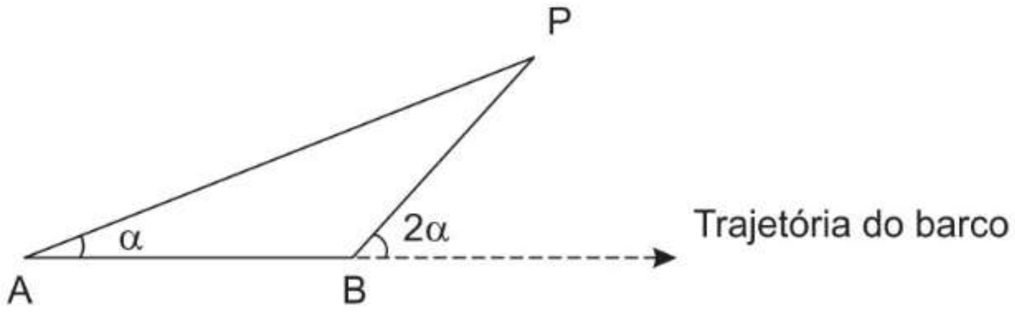
Quadro 7- Exercício

EXERCÍCIO

(Enem 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia.

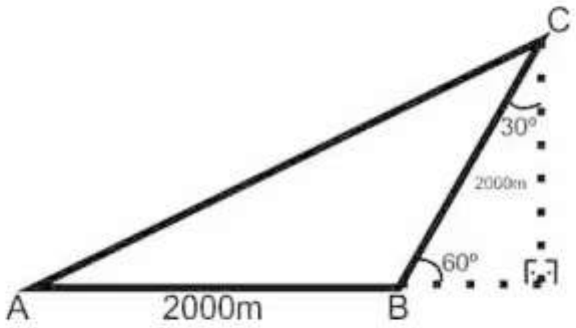
[4] Disponível em: https://deverdecasa-web.blogspot.com/2016/06/angulos-notaveis-3045-e-60.html

Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α= 30º e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será de:

Resolução:



$$cos\ 30° = \frac{d}{2000}$$
$$d = cos\ 30° \cdot 2000$$
$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2000$$
$$d = 1000\sqrt{3}\ m$$

Fonte: Descomplica (2021)[5].

8 - (15 minutos) Aplicação do *Quiz* das Relações Trigonométricas[6]. Composto por dez questões, este *quiz* deverá ser respondido individualmente pelos alunos, que terão acesso ao material virtualmente*;*

8.1 Discussão, após o teste, acerca de suas referidas perguntas, como forma de aferir e sanar as dúvidas manifestadas pelos estudantes.

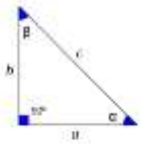
Quadro 8 - *Quiz* das Relações Trigonométricas

***Quiz* das Relações Trigonométricas**
1. O que caracteriza um triângulo retângulo? a) A soma dos seus ângulos internos ser 90 graus. b) Ele possui todos os lados iguais. c) Ele possui um ângulo de 90 graus e dois ângulos agudos menores que 90 graus.

[5]Disponível em: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2011/segundo-dia/para-determinar-distancia-de-um-barco-ate-praia-um-navegante-utilizou-o-seguinte-procedimento/

[6]Disponível em: https://pt.surveymonkey.com/survey-taken/?sm=CBT_2FS3zyvYOiJwdjdViZcnv3e9_2FW9li_2BJmxj0CcS8yRdPr2QRWahI0JEztGhvc4KZYkHFwgoEupbhF_2F8ulOfGKsXV_2BFtwUwvpAaIEKK1rUY_3D. Acesso em: 30 jun. 2020.

2. Quantas relações trigonométricas o triângulo retângulo possui?
a) Possui duas (seno e cosseno).
b) Possui três (cosseno, seno e tangente).
c) O triângulo retângulo não possui nenhuma relação trigonométrica.
3. Seno é:
a) A razão entre cateto oposto e hipotenusa.
b) A razão entre a tangente e cosseno.
c) A razão entre cateto adjacente e hipotenusa.
4. Considerando o triângulo da imagem, qual é a hipotenusa?



a) Lado c.
b) Lado b.
c) Lado a.
5. Qual das expressões refere-se ao Teorema de Pitágoras?
a) $a^2 = b^2 + c^2$
b) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
c) $\Delta = b^2 - 4ac$
6. Cosseno é:
a) A razão entre cateto oposto e hipotenusa.
b) A razão entre cateto adjacente e hipotenusa.
c) A razão entre cateto oposto e cateto adjacente.
7. Na trigonometria, quais são os ângulos notáveis?
a) 30 graus, 40 graus e 50 graus.
b) 15 graus, 90 graus e 120 graus.
c) 30 graus, 45 graus e 60 graus.
8. Calcule o valor de x. (Faça a resolução em seu caderno)

a) 5.
b) 12.
c) 10.
9. O Teorema de Pitágoras diz:
a) A soma do quadrado da hipotenusa é igual ao quadrado do cateto oposto.
b) A soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.
c) A soma do quadrado da hipotenusa mais o quadrado do cateto oposto é igual ao quadrado do cateto adjacente.
10. Tangente é:
a) A razão entre hipotenusa e cateto oposto.
b) A razão entre cateto oposto e hipotenusa.
c) A razão entre cateto oposto e cateto adjacente.

Fonte: As autoras.

8. (10 minutos) Apresentação, por meio do uso de *slides*, das Leis dos Senos e dos Cossenos, para que os estudantes verifiquem os casos que fogem ao triângulo retângulo;

Quadro 9 - Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

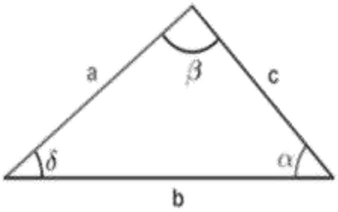


Figura 17 - Lei dos senos

Lei dos Senos

A Lei dos senos ou Teorema dos senos indica que a relação entre a medida do lado de um triângulo e o seno do ângulo oposto a esse lado será sempre constante.
Assim,

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\delta}\ .$$

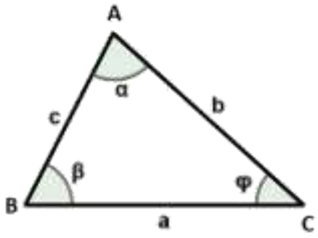


Figura 18 - Lei dos cossenos

Lei dos Cossenos

O quadrado de um dos lados do triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles.
Assim,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\alpha;$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cos\beta;$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cos\varphi.$

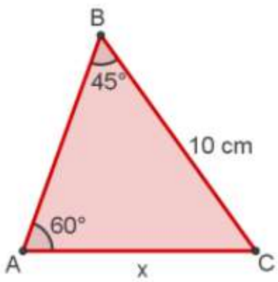
Fontes: Alana Caiusca (2018); Elaine Marciano (2020); Rosimar Gouveia (2021).

10. (10 minutos) Resolução de dois exercícios, com os alunos, a fim de exemplificar o uso das Leis dos Senos e dos Cossenos.

Quadro 10 - Exercícios (Lei dos Senos e Lei dos Cossenos)

Exemplos
(Lei dos senos)

1) No triângulo a seguir, determine a medida do lado AC, tendo em vista as medidas presentes nele. (Use √2 = 1,4 e √3 = 1,7).



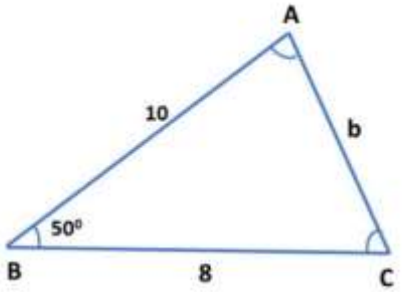
Resolução:

$$\frac{x}{sen\ 45°} = \frac{10}{sen\ 60°}$$
$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$x \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{2x}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$
$$2x \cdot \sqrt{3} = 20\sqrt{2}$$
$$x = \frac{20\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{20 \cdot 1{,}4}{2 \cdot 1{,}17}$$
$$x = \frac{10 \cdot 1{,}4}{1{,}17}$$
$$x = \frac{14}{1{,}7}$$
$$x = 8{,}23$$

(Lei dos cossenos)

2) Determine a medida do lado AC.



$$AC = b$$
$$b^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot cos\,50°$$
$$b^2 = 164 \cdot 160 \;\cdot cos\,50°$$
$$b^2 = 164 \cdot 160 \cdot 0{,}64279$$
$$b \cong 7{,}82$$

Fontes: Alana Caiusca (2018); Rosimar Gouveia (2021).

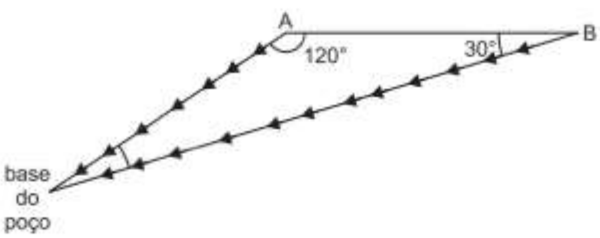
11. (10 minutos) Iremos propor a resolução do segundo exercício, dispondo de 5 minutos para os alunos resolverem, após corrigiremos o exercício, sanando possíveis questionamentos que os alunos possam ter no decorrer da resolução.

Quadro 11- Exercício

Exercício 2

(UEL) Duas plataformas marítimas (a e b) estão localizadas de tal forma que os ângulos de emissão de sinais de comunicação com a base de um poço submarino são, respectivamente, iguais a 120° e 30°, conforme a figura a seguir.

Admitindo-se que a distância entre a plataforma a e b seja ab = 1km, a maior distância entre a base do poço e uma das duas plataformas, em km, é aproximadamente:



Resolução:

No triangulo AOB, aplicando-se a Lei dos Cossenos, temos:

$$AB^2 = 30^2 + 100^2 - 2 * 30 * 100 * \cos 60°$$

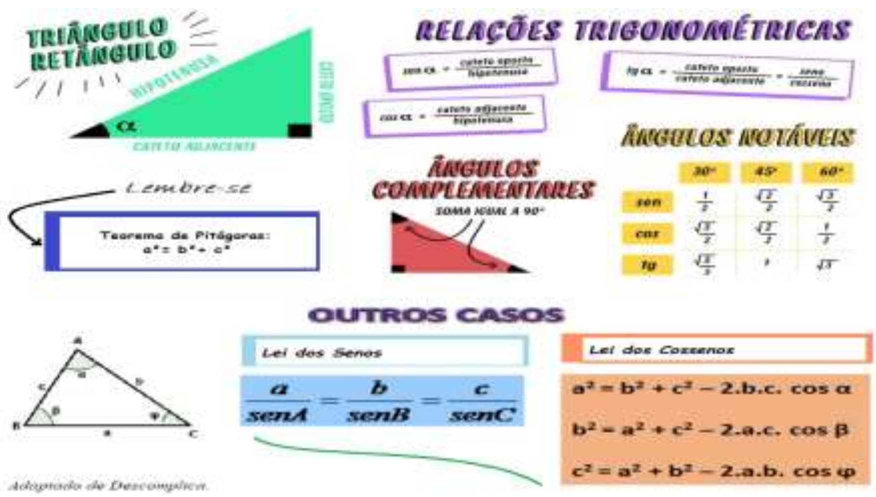
$$7900 = 900 + 10000 - 3000$$

Portanto: $AB = \sqrt{7900} = 10 * \sqrt{79} = 90$

Fonte: Pierro (2019).

12. (5 minutos) Retomada dos conceitos abordados durante o encontro a partir da apresentação de um mapa mental. Tal apresentação deverá ser realizada a partir do compartilhamento da tela das estagiárias, as quais enfatizarão as informações elencadas no mapa;

Figura 19 - Mapa mental

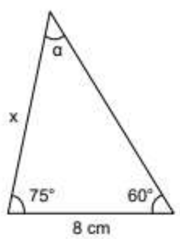


Fonte: Adaptado de Descomplica.

13. (20 minutos) Disponibilização de uma lista de exercícios, cujo *link* será encaminhado aos alunos, de maneira que apliquem os conceitos trabalhados. O encaminhamento desta lista se dará da seguinte maneira: após a leitura de um exercício, os estudantes terão um pequeno intervalo de tempo para que busquem solucioná-lo. Sequencialmente, as estagiárias partirão para a sua correção, utilizando, para isso, mesa digitalizadora ou outro recurso que permita a resolução com os estudantes. O mesmo será feito com os demais exercícios até que a lista (ou o tempo) se esgote.

Quadro 12 - Lista de Exercícios

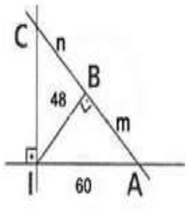
1) (UFPR) Considere o triângulo.



Fonte: do exercício.

a) Quanto mede o ângulo α?
b) Quanto mede x?

2) (PUC-SP) No esquema abaixo, a reta *AB* representa a trajetória de um navio e no ponto *I* localiza-se uma ilha. Quando o navio se encontra no ponto *A*, $AI = 60\ km$ e quando o navio está em *B*, $BI = 48\ km$. Se *BI* é a menor das distâncias do navio à ilha, quando o navio estiver em *C*, a distância dele à ilha será, em quilômetros:

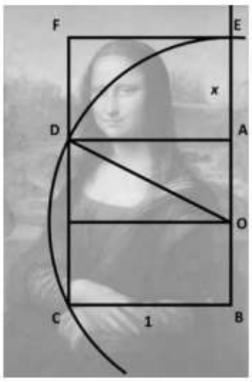


Fonte: do exercício.

a) 40
b) 60
c) 80
d) 100
e) 120

03) (UEM) Seja *ABC* um triângulo e sejam α, β e γ as medidas dos seus ângulos internos relativos aos vértices *A*, *B* e *C*, respectivamente. Suponha $\alpha = 120°$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Marque o que for correto. Na sequência, anote, no quadro, a somatória das alternativas assinaladas.
01) $\cos\alpha > 0$.
02) O lado *BC* é o maior lado do triângulo *ABC*.
04) Se *AC* mede $\sqrt{2}$cm, então *BC* mede $\sqrt{3}$cm.
08) Se *AB* mede 3 cm e *BC* mede $2\sqrt{2}$cm, então *AC* mede 5 cm.
16) $sen\,\gamma < \frac{\sqrt{2}}{4}$.

4)(UEL) A icônica obra Mona Lisa, de Leonardo Da Vinci, exposta no Museu do Louvre, possibilita pôr à prova as proporções matemáticas nela presentes. Partindo de um quadrado *ABCD* de lado 1, que delimita uma região abaixo da cabeça, pode-se obter um retângulo, que contém a cabeça da Mona Lisa, por meio da construção geométrica descrita a seguir. Seja *O* o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Tome a circunferência de centro *O* e raio $\overline{OD}$. Encontre o ponto *E* dado pela intersecção da circunferência com a semirreta $\overline{BA}$. Considere o ponto *F* de modo a obter o retângulo de vértices *EADF*, como ilustrados na figura a seguir.



Com base na construção geométrica fornecida e na figura, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o comprimento do segmento $\overline{EA}$.

a) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

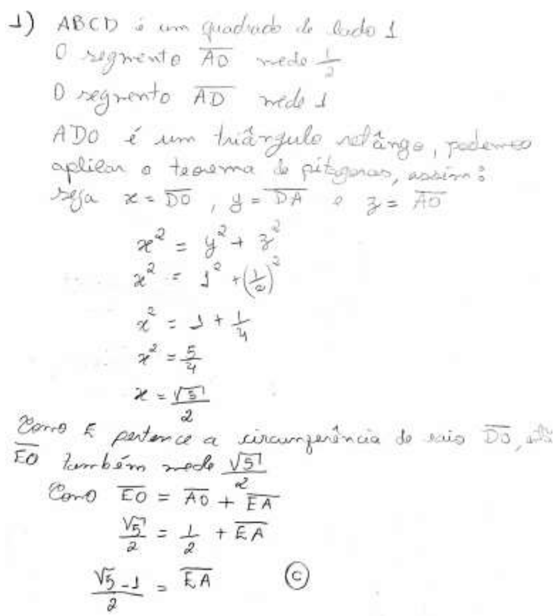
c) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

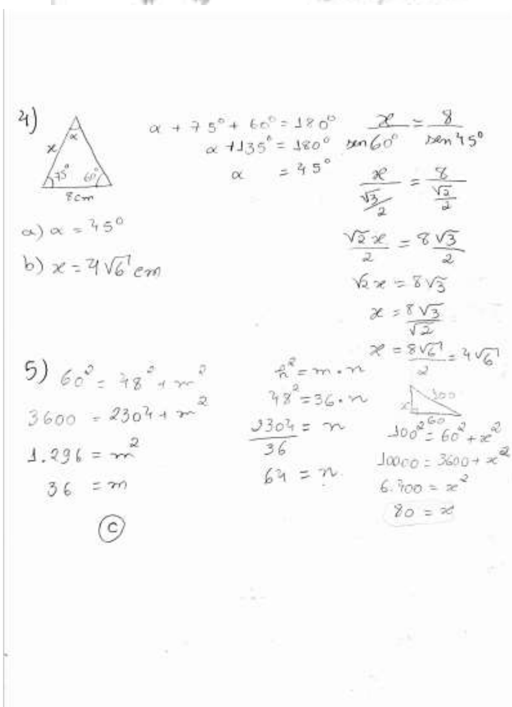
d)	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
e)	$\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

Fontes: Canal do Professor Joaquim (2020); UEL (2019); UEM (2019); UEM (2018); UFPR (2016).

Quadro 13 - Resolução da lista

Seguem as resoluções referentes aos exercícios enunciados no quadro .





Fonte: As autoras.

14. (5 minutos) Realização das considerações finais, isto é, momento para a disponibilização do *link* do mapa mental utilizado em 9, no intuito de que os estudantes possam ter acesso ao material em momentos posteriores, e de uma lista com exercícios complementares, além da realização da

avaliação do encontro, por meio da construção de uma nuvem de palavras[7]. Para essa construção, os alunos deverão acessar o *link* encaminhado pelas docentes, o qual os direcionará à plataforma Mentimeter. Nela, haverá a pergunta: "Em uma palavra, como você descreveria a aula de hoje?". Assim, com base nas palavras mencionadas, a nuvem será automaticamente confeccionada.

Avaliação:

A avaliação dos estudantes será baseada em sua participação durante as atividades propostas.

Referências:

CAIUSCA, Alana. **Lei dos Senos e dos Cossenos**. 2018. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/lei-dos-senos-e-dos-cossenos. Acesso em: 17 abr. 2021.

CASSIO. Jorge. **Trigonometria no Triângulo Retângulo**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ga8JkrZh. Acesso em: 13 abr. 2021.

GOUVEIA, Rosimar. **Lei dos Cossenos**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/lei-dos-cossenos/. Acesso em: 17 abr. 2021.

IEZZI, Gelson *et al*. **Matemática**: ciência e aplicação. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LAPELOSO, Mariana. **Perguntas criativas para brincadeiras**. Disponível em: https://www.dicionariopopular.com/perguntas-criativas-brincadeiras/. Acesso em: 12 abr. 2021.

MAPA MENTAL TRIGONOMETRIA. Disponível: https://br.pinterest.com/pin/407857310002362852/. Acesso em: 13 de abr. 2021.

MARCIANO, Elainy. **Lei dos senos**. 2020. Disponível em: https://escolaeducacao.com.br/lei-dos-senos/. Acesso em: 17 abr. 2021.

MARMONTEL, Jose. **Matemática para o concurso da Guarda Municipal**. Disponível em: http://guardamunicipalcuritiba.blogspot.com/p/material-para-estudo-e-dicas-para-o.html. Acesso em: 13 abr. 2021.

MENTIMETER. Disponível em: https://www.mentimeter.com/. Acesso em: 12 de abr. 2021.

ROLETA ONLINE. Disponível em: https://app-sorteos.com/pt/apps/girar-roleta-aleatoria. Acesso em 15 jun. 2020.

4.1.2 Relato I

Aos vinte e nove dias do mês de maio do corrente ano, as estagiárias Fernanda Carla de Oliveira, Karla Katrine Pereira Cazarotto, Nadya Beatriz Antunes Barroso e Suenir Barreto dos Anjos, da quarta série do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Oeste

[7] Disponível em: https://www.menti.com/pk2e1mveod. Acesso em: 12 abr. 2021.

do Paraná, *campus* de Cascavel, realizaram, sob a orientação da professora Pamela Gonçalves, sua primeira prática no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (Promat), que neste ano, ocorre virtualmente, por meio da plataforma *Jitsi*.

O encontro, que teve duração de duas horas e trinta minutos, contou com a participação de dezoito alunos, os quais, logo no início, foram motivados a participar da dinâmica de apresentação. Nesta, a começar pelas acadêmicas, cada um pôde escolher, dentre 43 caixas preparadas por meio da ferramenta *WordWall*, aquela de sua preferência. Cada caixa apresentava uma pergunta pessoal, o que possibilitou, mediante suas respostas, a interação entre os participantes. Já neste primeiro momento, foi possível notar o engajamento dos estudantes, que se mostraram bastante participativos e, além de responderem aos questionamentos, forneceram informações acerca de sua idade e município – tudo isso por meio do *chat* da plataforma ou microfone.

Sequencialmente, as estagiárias partiram para a explanação dos conteúdos. Em razão deste primeiro encontro tratar da trigonometria no triângulo retângulo, com o auxílio de *slides*, as acadêmicas iniciaram as explicações de modo a retomar os conceitos de triângulo retângulo, falando também sobre os catetos (oposto e adjacente) e a hipotenusa. Além disso, enunciaram e, partindo do uso de duas animações, demonstraram geometricamente o Teorema de Pitágoras. Após, os estudantes puderam assistir ao vídeo *Simplex - DJ Pitágoras (Teorema de Pitágoras) [DUBLADO] [HD]***.** Com este recurso, foi possível verificar um exemplo de aplicação do referido teorema.

Em seguida, de modo que os alunos pudessem aplicar seus conhecimentos sobre o Teorema de Pitágoras, as acadêmicas apresentaram um problema (*o famoso caso do bambu quebrado*). Depois de destinarem cerca de cinco minutos para sua resolução, realizaram a correção por meio da exibição dos passos da resolução nos *slides*. Pelo fato de alguns alunos terem manifestado dúvidas com relação à esta resolução, as estagiárias retomaram os passos, em prol de auxiliá-los.

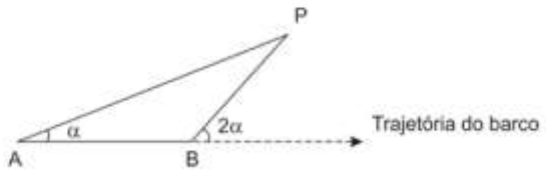
A fim de dar continuidade à sequência planejada, as acadêmicas acessaram, então, o material *Trigonometria no triângulo retângulo*, disponível no *software* GeoGebra. Ao compartilharem sua tela com os discentes, realizaram a manipulação deste material, construindo as relações seno, cosseno e tangente. Ademais, forneceram o *link* de acesso ao material aos estudantes, para que, em outra oportunidade, também o pudessem manusear. Por fim, de volta aos *slides*, forneceram um exemplo para cada uma das razões.

De modo a determinar os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, com o uso de uma lousa, foi realizada a demonstração para os casos de 30º e 60º. Por se tratar de processos similares, o caso do ângulo de 45º foi demonstrado mais brevemente, apenas por meio da exibição de *slide*. Por fim, uma tabela com os dados obtidos foi apresentada.

Dando continuidade ao encontro, as estagiárias apresentaram uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Após concederem, aos estudantes, cerca de cinco minutos para a resolução, realizaram a correção do exercício, escrevendo em uma folha de papel que, por meio da câmera de seu *smartphone*, foi exibida aos alunos.

Quadro 14- Exercícios

(Enem – Adaptada) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α= 30º e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será de ____________.

Fonte: Inep (2011).

Na sequência, as estagiárias orientaram os estudantes quanto à resolução de um questionário *on-line* contendo dez perguntas acerca dos conceitos até então apresentados. Para tal, o *link* de acesso foi disponibilizado aos alunos, que, rapidamente, responderam às questões e, de maneira espontânea, divulgaram seus resultados no *chat*. Estes resultados, combinados com os relatórios emitidos pela plataforma *SurveyMonkey*, na qual o questionário foi elaborado, demonstraram um bom entendimento, por parte dos estudantes, dos conteúdos trabalhados, uma vez que a pontuação média foi de 92%.

De volta ao compartilhamento dos *slides*, as estagiárias enunciaram as Leis dos Senos e dos Cossenos, fornecendo, para cada uma delas, um exemplo referente à sua aplicação – os exercícios foram resolvidos tal como a questão do quadro 1.

Nos instantes finais, além dos recados quanto à disponibilização dos materiais utilizados durante a aula e a data do encontro seguinte, as estagiárias pediram para que os alunos acessassem a plataforma *Mentimeter*, de modo a descrever, por meio de uma só palavra, a aula. Assim, uma nuvem de palavras pôde ser construída.

Figura 20 - Nuvem de Palavras

Fonte: Acervo das autoras.

Embora nem todos tenham participado deste momento, foi possível notar que os discentes acharam o encontro bastante proveitoso. De fato, os encaminhamentos propostos somados à participação ativa dos estudantes, tornaram a aula dinâmica e, ao mesmo tempo, permitiu que os conceitos fossem explorados detalhadamente. Por outro lado, devido à limitação de tempo, o plano de aula não foi totalmente cumprido.

Com relação à plataforma em que ocorreu o encontro, importa mencionar que as estagiárias precisaram lidar com momentos de instabilidade. Em diversas vezes, o compartilhamento dos materiais foi interrompido, dificultando a visualização e compreensão por parte dos estudantes. Tal problema precisou ser contornado por meio da captura de imagens da tela das estagiárias, as quais foram simultaneamente enviadas para o grupo da turma, no *WhatsApp*.

Assim sendo, pode-se afirmar que esta primeira experiência no Promat foi muito enriquecedora, pois, além de permitir a interação com os discentes, possibilitou a vivência de uma prática diferenciada, na qual os encaminhamentos metodológicos precisaram se valer da tecnologia e da conectividade, o que é de fundamental importância nos dias atuais.

4.2 Encontro II

4.2.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 2º ENCONTRO
(12/06/2021)

Público-Alvo:

Educandos inscritos no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT).

Tempo de execução:

2 horas e 30 minutos.

Conteúdos:

Arcos, ângulos, unidades de medidas dos ângulos e circunferência.

Objetivo Geral:

Espera-se que, por meio das aulas ministradas, os alunos mostrem-se capazes de:

- Identificar as relações trigonométricas (seno, cosseno e tangente) na circunferência.

Objetivos Específicos:

Mediante a execução de aulas pautadas na resolução de problemas, bem como na participação ativa dos discentes, objetiva-se que os educandos se apresentem aptos a:

- Reconhecer ângulos congruentes e simétricos (correspondentes) na circunferência;
- Conhecer unidades de medidas dos ângulos, assim como realizar conversões;
- Identificar os eixos do seno, cosseno e tangente, assim como os quadrantes positivos e negativos no círculo trigonométrico;
- Calcular seno, cosseno e tangente de diferentes ângulos, utilizando o posicionamento da reta na circunferência e verificando o sinal dos quadrantes.

Recursos Didáticos:

No decorrer das aulas, serão utilizados tais materiais:

Caneta, lápis, borracha, lista de exercícios, *slides*, formulários *on-line* para avaliação e controle de frequência, aplicativo *Kahoot*, *software* GeoGebra e plataforma *ThingLink.*

Encaminhamento metodológico:

Com a finalidade de atingir os objetivos supracitados, serão desenvolvidas as seguintes atividades:

➢ Anteriormente ao encontro:

9. Disponibilização de *link*[8] para acesso ao material contido no *software* GeoGebra juntamente com um roteiro, que servirá como um norte para a observação dos conceitos de arco, ângulo, graus e radianos, assim como para a realização da conversão entre as duas unidades.

Quadro 15- Roteiro para a atividade assíncrona

Graus e Radianos no GeoGebra
Para explorar o material disponível em *https://www.geogebra.org/m/evtf5Fqs*, siga o roteiro abaixo. 1) Clique em “Conceito de ângulo”. Assim, você visualizará as semirretas *r* e *t*, cuja origem é o ponto *O*. À região ou conjunto de pontos situados entre *r* e *t* chamamos ângulo. Podemos representar o ângulo da imagem como $A\hat{O}B$; 2) Clique em “Graus” e, na sequência, em “Mostrar Circunferência”, “Mostrar Raio r” e “Dividir em 360 Partes iguais”. Caso apareça falhas na imagem, clique novamente em “Dividir em 360 partes iguais”. Ao dividir a circunferência dessa maneira, podemos verificar que cada grau corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência; 3) Clique em atualizar (símbolo em destaque na imagem);

[8] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/evtf5Fqs. Acesso em: 20 abr. 2021.

4) Clique em “Radianos”, assim como em “Mostrar Circunferência” e “Mostrar Raio r”. Depois, clique em “Animar raio r” e em “Mostrar arco = raio”. Ao arco de medida igual ao raio r, chamamos radiano. Sabendo que todo arco está relacionado a um ângulo central, as medidas em radianos também estarão;

5) Clique cinco vezes em “Próximo arco”. Em seguida, clique em “Conclusão”. Note que, sendo $2\pi r$ o comprimento da circunferência, podemos concluir que a medida da circunferência em radianos é dada por 2π;

6) Clique em “Conversão” e procure resolver o problema enunciado. Lembre-se de que, em se tratando de graus, a circunferência completa mede 360º e, em radianos, a circunferência tem medida de 2π;

7) Clique em “Solução” para conferir a sua resposta;

8) Clique em “Ok” para visualizar um novo exercício. Depois, de respondê-lo, clique novamente em “Solução”;

9) Repita, por fim, o processo do passo 8.

Fonte: As autoras.

- Durante o encontro:

1. (30 minutos) Retomada dos conceitos abordados na atividade assíncrona (arco, ângulo, graus e radianos), seguida da realização do exercício apresentado no quadro 2, o qual, bem como os demais, será resolvido a partir do emprego de mesa digitalizadora e/ou outro recurso que permita a formulação das sentenças ao vivo, na presença dos estudantes;

Quadro 16-Exemplo (Conversão)

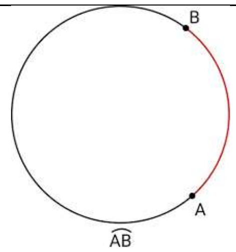
Revisão e Exemplos

ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

Arco de circunferência é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos.

Os pontos A e B são chamados de **extremidades** dos arcos.

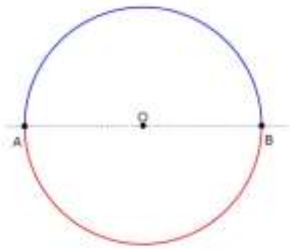
Figura 21 - Extremidades dos arcos



Fonte: Matemática Básica (2021).[9]

Se as extremidades de um arco coincidem com as extremidades de um diâmetro cada um dos arcos denomina-se **semicircunferência**.

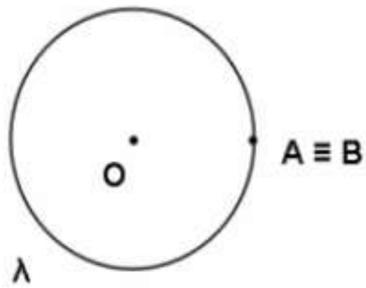
Figura 22 - Semicircunferência



Fonte: InfoEscola (2021).[10]

Se os pontos A e B coincidem, eles determinam na circunferência **arco nulo ou arco de uma volta.**

Figura 23 - Arco de uma volta



Fonte**: M**atemática elementar (2021). [11]

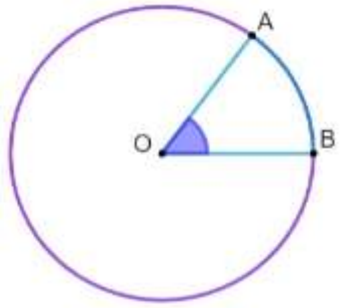
Ângulo central.

Consideramos uma circunferência de centro O e os pontos A e B pertencentes a ela. Traçando as semirretas AO e OB, determinamos o ângulo central AÔB e o arco AB;

A medida de um arco de circunferência é a medida do ângulo central correspondente.

Figura 24 - Ângulo central

[9] Disponível em: https://www.infoescola.com/geometria-plana/circunferencia/
[10] Disponível em: https://www.infoescola.com/geometria-plana/circunferencia/
[11] Disponível em: https://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Trigonometria/Arcos_e_%C3%A2ngulos



$$\widehat{AB} = A\hat{O}B$$

Fonte: Brasil escola (2021).[12]

Unidades de medida de arcos e ângulos

Graus:

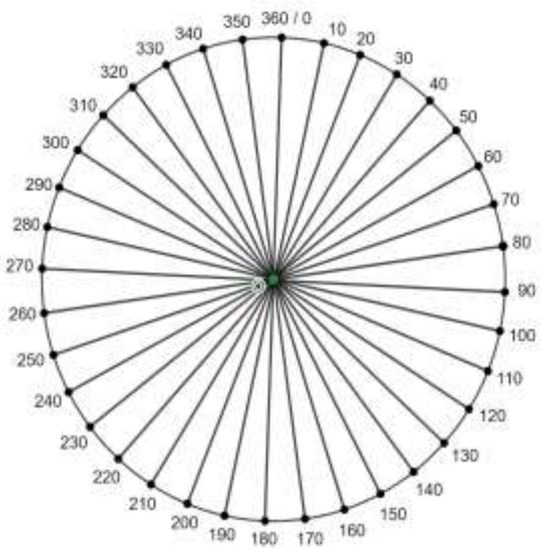
Dividindo uma circunferência em partes iguais cada uma dessas partes é um arco de 1°;

Os submúltiplos do grau (°) são o minuto (‘) e o segundo (‘’);

1 minuto é igual $\frac{1}{60}$ do grau;

1 segundo é igual a $\frac{1}{60}$ do minuto.

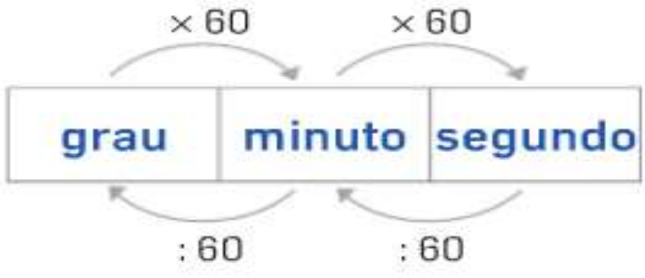
Figura 25 - Arcos de 1°;



Fonte: Kuadro (2021).[13]

Figura 26 -Conversão de graus, minutos, segundos.

[12] Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/angulos-no-circulo.htm
[13] Disponível em: https://www.kuadro.com.br/resumos-enem-vestibulares/matematica/geometria-plana/angulos?id=2221&topicId=4538



Fonte: Sempre mathematicar com música (2015).[14]

Radiano:

É um arco cujo o comprimento é igual a medida do raio da circunferência que o contém. Indicamos por rad;

Para se determinar a medida de um arco AB, em radiano α, basta dividir o comprimento do arco (C = 2πr) pela medida do raio da circunferência que o contém;

A medida de toda a circunferência em radianos é 2π.

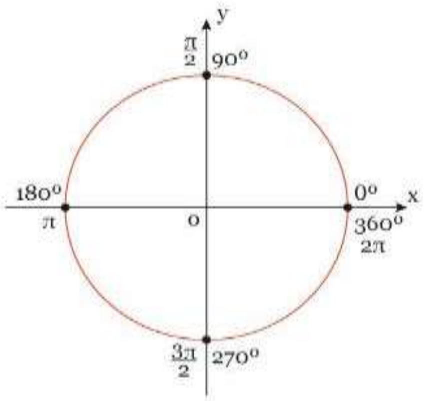


Figura 27 - Circunferência

Fonte: Educa Mais Brasil (2021).[15]

Exercícios

1. Realize as conversões de:
a) 20° em radianos:
b) $\frac{\pi}{7} rad$ em graus:
➢ Resolução:
a) $180°. x = 20°. \pi$

$$x = \frac{20°. \pi}{180°}$$

$$x = \frac{\pi}{9}$$

b) $180°. \frac{\pi}{7} = x. \pi$

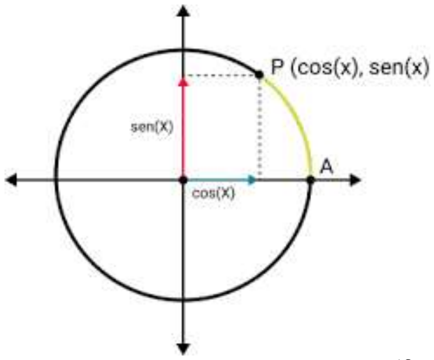
$$x = \frac{180°}{7}$$

$$x \cong 25{,}7°$$

SENO E COSSENO DE UM ARCO

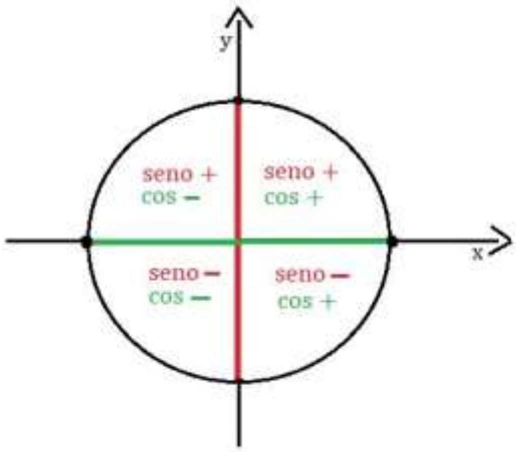
Considerando um número real **x** qualquer e um ponto **P** do círculo trigonométrico, associamos esse ponto a um único valor para as funções trigonométricas seno e cosseno, e chamaremos de **sen(x)** e **cos(x)**.

Figura 28- Seno e cosseno.



Fonte: Matemática Básica (2021). [16]

Figura 29 – Quadrantes seno e cosseno



Fonte: Andréia Zanchetti (2021).[17]

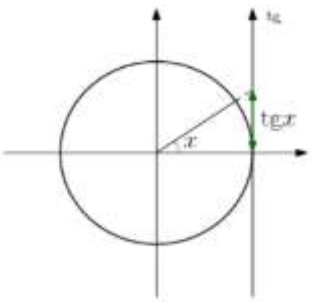
Tangente de um arco

A medida da tangente de um ângulo no ciclo trigonométrico é definida a partir de uma reta tangente ao ciclo trigonométrico, paralela ao eixo y.

Traçamos uma reta que liga o ponto do ciclo e a origem do sistema; vemos onde está reta cruza a reta tangente; a tangente do ângulo será a distância (considerando sinal) deste ponto de cruzamento até o eixo horizontal.

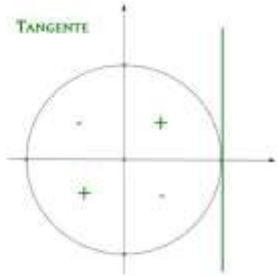
Figura 30 – Tangente de um arco

[14] Disponível em: http://sempreamathematicarcommusica.blogspot.com/2015/10/conversoes-adicoes-e-subtracoes-de.html
[15]Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/circulo-trigonometrico
[16] Disponível em: https://matematicabasica.net/funcoes-trigonometricas/
[17] Disponível em: https://cursoenemgratuito.com.br/circulo-trigonometrico/



Fonte: Matika (2021).[18]

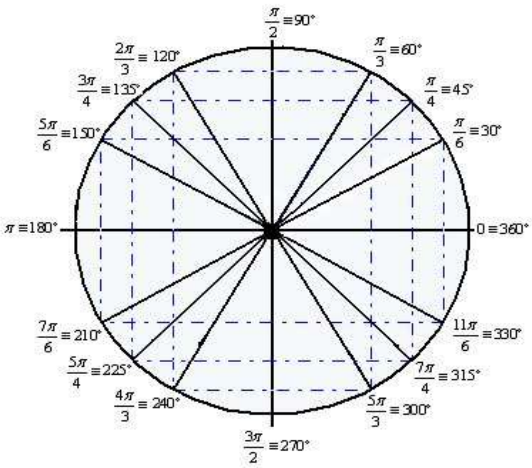
Figura 31 - Quadrantes tangente



Fonte: Matika (2021).[19]

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO E ÂNGULOS NOTÁVEIS

Figura 32- Circulo trigonométrico



Fonte: Toda Matéria (2021).[20]

Figura 33 - Ângulos notáveis

	30°	**45°**	**60°**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Paula Eneas, 2017[21]

2. (25 minutos) Apresentação de dois exercícios, no intuito de que, após a leitura por parte das docentes, os alunos tenham alguns instantes para buscar resolvê-los;

2.1 Correção da atividade, partindo da resolução coletiva.

Quadro 17 - Exercícios

Exercícios Complementares
1. (OBMEP) Qual das alternativas abaixo apresenta o mesmo valor que sen 150º? a) sen 210º. b) -sen 150º. c) cos 150º. d) cos 300º. e) -cos 210º. f) sen 30º. ➢ Resolução Analisando o círculo trigonométrico, podemos verificar que o valor do ângulo de 150° é o mesmo valor que o ângulo de 30°. Logo sen 150° é igual sen 30°. 2. Calcule o seno e o cosseno dos seguintes arcos: a)120º b)225º ➢ Resolução a) Com a ajuda do círculo trigonométrico, podemos analisar que o ângulo de 120° é o mesmo que o ângulo de 60°. Logo sen 60° é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e cos 60° é - $\frac{1}{2}$, pois 120° está no quadrante II. b) Com a ajuda do círculo trigonométrico, podemos analisar que o ângulo de 225° é o mesmo que o ângulo de 45°. Logo sen 45° é - $\frac{\sqrt{2}}{2}$, e cos 45° é - $\frac{\sqrt{2}}{2}$, - $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pois 225° está no quadrante III.

Fonte: OBMEP (2021).

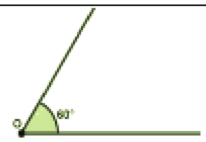
3. (30 minutos) - Utilização do aplicativo *Kahoot*, a fim de que, em forma de competição, os estudantes respondam às questões propostas, atentando-se às mediações das docentes;

Quadro 18- Questões para o *Kahoot*

Questionário	
1.	Qual é o seno de 30°
a)	$\mathbf{\frac{1}{2}}$
b)	$cos\ 45°$
c)	2
d)	3
2.	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ é igual a $-(cos\ 135°)$.
a)	**Verdadeiro**
b)	Falso
3.	A imagem é equivalente a:

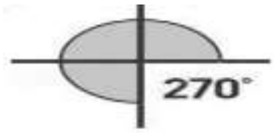
[18] Disponível em: https://matika.com.br/trigonometria-no-ciclo-trigonometrico/a-tangente-no-ciclo-trigonometrico
[19] Disponível em: https://matika.com.br/trigonometria-no-ciclo-trigonometrico/a-tangente-no-ciclo-trigonometrico
[20] Disponível em: https://www.todamateria.com.br/funcoes-trigonometricas/
[21] Disponível em: http://djnmatematica9ano.blogspot.com/2017/10/2410-angulos-notaveis.html

a) Primeira determinação positiva de 780°
b) Ângulo congruente a 630°
c) π
d) 2



4. Sen $\frac{\ }{2}$ é:
a) $\mathbf{\cos 360°}$
b) $\cos 30°$
c) $-\frac{1}{2}$
d) 1

5. Sobre a imagem, é correto afirmar.



a) Ângulo congruente ao ângulo de 540°
b) Primeira determinação positiva do ângulo de 120°
c) Ângulo cujo seno é -1
d) 0°

6. Seja $sen\ \frac{4\pi}{3}$. Qual é a resposta correta?
a) $\mathbf{\cos 390°}$
b) $sen\ 290°$
c) $-(-1)$
d) $-0{,}257$

7. A tangente de 1800° é igual a zero.
a) Verdadeiro
b) Falso

8. Sobre a tangente de 90°, é correto afirmar.
a) Não existe
b) 0
c) 1
d) $\sqrt{3}$

Fonte: As autoras.

4. (50 minutos) Disponibilização de uma lista de exercícios, cujo *link* será encaminhado aos alunos, de maneira que apliquem os conceitos trabalhados;

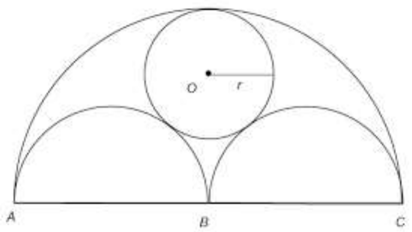
4.1 Correção dos exercícios utilizando a mesa digitalizadora e/ou quadro branco, permitindo que a resolução seja acompanhada pelos estudantes.

Quadro 19- Lista de Exercícios

Lista de exercícios

PROMAT – Arcos e Ângulos

1- (UNIOESTE - Adaptada) Na figura a seguir, o arco AC representa uma semicircunferência de raio R = 6 cm e o B é o ponto médio de AC. A circunferência de centro O e raio r tangencia as semicircunferências representadas pelos arcos AC, AB E BC. Levando em conta estas informações, qual é a medida do raio r desta circunferência?

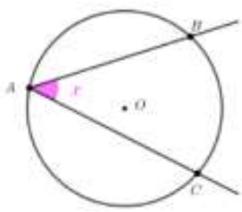


Resolução:
$BC = 6\ B\ é\ o\ ponto\ médio\ e\ o\ R = 1$

$Traçando\ OB\ temos\ que\ OB\ =\ 6 -\ r$
Chamamos de D o ponto médio da reta AB
Traçando DO = 3+r e traçando a reta DB=3
Temos então um triângulo retângulo ODB

$$(6 - r)^2 + 3^2 = (3 + r)^2$$
$$36 - 12r + r^2 + 9 = 9 + 6r + r^2$$
$$r = 2$$

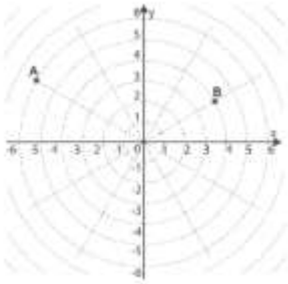
2- (OBMEP) Na figura abaixo, o arco BC mede 120°. Calcule o valor de x.



Resolução:
Como a medida do arco BC é igual a medida do ângulo central estre por sua vez é o dobro da medida do ângulo inscrito x temos:

$$x = \frac{AB}{2} \rightarrow x = \frac{120°}{2} \rightarrow x = 60°$$

3- (Enem - Adaptada) Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem (0;0).
Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.
Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto **B** até o ponto **A**, qual a distância que um objeto deve percorrer?
Resolução:
Menor distância de B até A.
distância entre cada circunferência é igual a 1, então, do ponto a até a circunferência de raio 1 andamos 5 unidades e da circunferência até B andamos 3 unidades, logo, a distância percorrida é 8 unidades + $\frac{2\pi}{3}$, logo a reposta é 8 + $\frac{2\pi}{3}$.

Fontes: Unioeste (2011); OBMEP (2019).

5. (15 minutos) Realização das considerações finais, isto é, momento para a disponibilização de uma lista com exercícios complementares e de um *link*[22] na plataforma *ThingLink*. Este último direcionará os alunos à uma revisão do conteúdo, tal como ao formulário referente à avaliação da prática das docentes.

Avaliação:

[22] Disponível em: https://www.thinglink.com/scene/1442318302528405506. Acesso em: 23 abr. 2021.

A avaliação dos estudantes será baseada em sua participação durante as atividades propostas, especialmente na realização do questionário através do aplicativo *Kahoot.* Além disso, de modo a fornecer um *feedback* acerca da prática docente, os alunos deverão descrever o encontro, preenchendo um formulário.

Referências:

BRASIL, Tutor. **Geometria plana**. Disponível em: https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=62547. Acesso em: 27 abr. 2021.

CONCURSOS, Q. **Questões Geometria Plana**. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/9918a051-e8. Acesso em: 27 abr. 2021.

COSTA, Camila Lima da. **A UTILIZAÇÃO DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO**. 2016. 98 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Cap. 4.

DANTAS, Fábio Alvaro. **Razões Trigonométricas na Circunferência.** Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ca7jftnh. Acesso em: 23 abr. 2021.

EDCARLOS. **Graus e Radianos**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/evtf5Fqs. Acesso em: 20 abr. 2021.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS CONVERSÃO DE GRAUS EM RADIANOS. Disponível em: https://sabermatematica.com.br/exercicios-resolvidos-conversao-de-graus-em-radianos.html. Acesso em: 28 abr. 2021.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **Provas e soluções**. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 28 abr. 2021.

OBMEP, Clubes de Matemática da. **Ângulo Central e Ângulo Inscrito – Problemas**. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/angulo-central-e-angulo-inscrito-problemas/. Acesso em: 27 abr. 2021.

4.2.2 Relato II

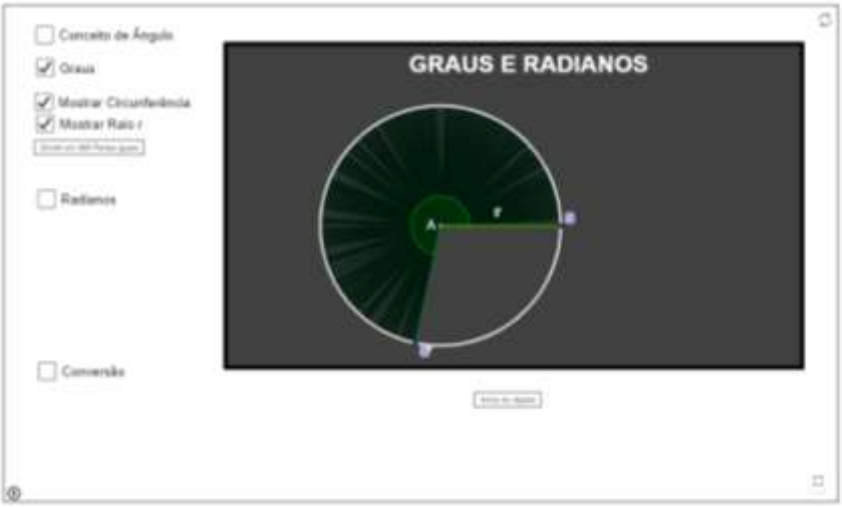
Relatório Promat – Segundo Encontro

Aos doze dias do mês de junho do corrente ano, as estagiárias Fernanda Carla de Oliveira, Karla Katrine Pereira Cazarotto e Nadya Beatriz Antunes Barroso, da quarta série do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel, realizaram, sob a orientação da professora Pamela Gonçalves, mais uma prática no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um

Enfoque à Área de Matemática (Promat), que neste ano, ocorre virtualmente, por meio da plataforma *Jitsi*. A partir desse encontro, a nossa colega Suenir não participou mais dos encontros do PROMAT.

Com duração de duas horas e trinta minutos, este segundo encontro contou com a participação de onze alunos. Para dar início à aula, as estagiárias realizaram, por meio da exibição de *slides*, uma retomada acerca dos conceitos de arco, ângulo, graus e radianos. Todavia, dias antes desta aula, as acadêmicas enviaram aos alunos um material disponível no *site* do *software* GeoGebra, de modo que os estudantes pudessem familiarizar-se com o conteúdo. Neste material, são dadas, de maneira interativa, as definições de arco e ângulo, além de tratar sobre as unidades de medida do ângulo e suas conversões.

Figura 34 - Material indicado

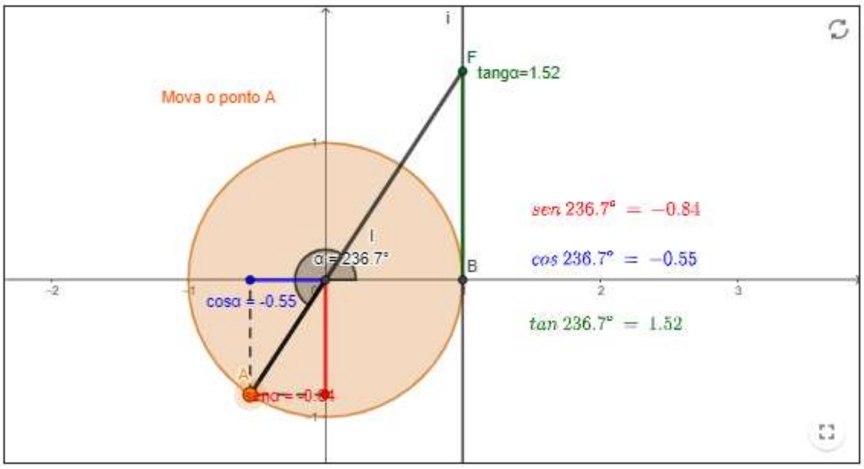


Fonte: GeoGebra.

Para complementar, um exercício tratando da conversão entre graus e radianos foi resolvido com os alunos.

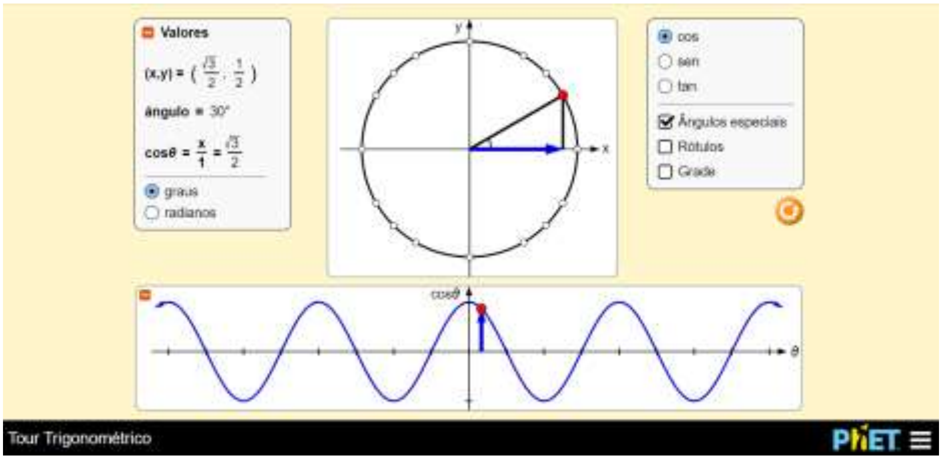
A fim de trabalhar com as relações no círculo trigonométrico, as discentes exibiram além dos *slides*, algumas animações também existentes no GeoGebra. Deste modo, abordaram a identificação dos eixos x (cosseno) e y (seno), a reta tangente, a variação dos sinais para cada uma das relações e a simetria entre os ângulos. Porém, diante das dúvidas expressas pelos estudantes, foi necessário retomar as explicações, bem como exibir o *Tour Trigonométrico* da plataforma *Phet*, cujas funções trigonométricas são apresentadas de maneira bastante visual. Na sequência, dois exercícios foram propostos e, seguidamente, resolvidos com a turma.

Figura 35 - Círculo trigonométrico



Fonte: GeoGebra.

Figura 36 - Tour Trigonométrico

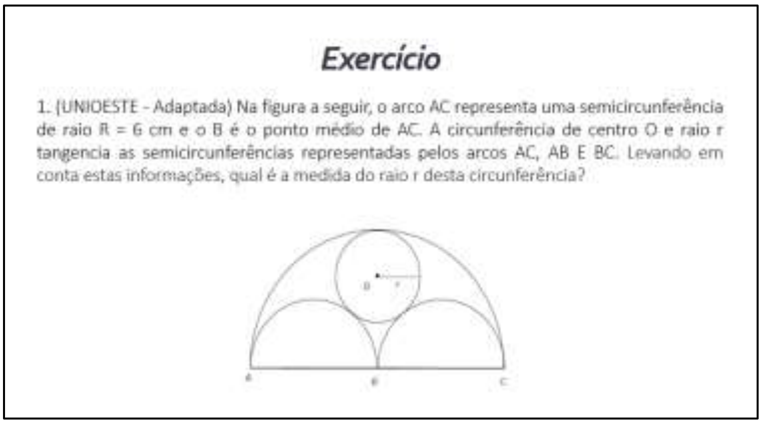


Fonte: Phet.

Logo depois, os alunos foram motivados a participar de um *quiz* na plataforma *Kahoot.* O questionário, que contava com perguntas referentes aos conceitos até então trabalhados, pôde ser controlado pelas estagiárias, de forma que os avanços dos estudantes foram dados em tempo real. Com relação ao seu desempenho na atividade, a média de acertos foi de 47%.

Dando continuidade ao encontro, as acadêmicas enunciaram um novo exercício. Mais especificamente, este se tratava de uma questão advinda de um dos vestibulares da Unioeste. Após destinarem um tempo aos alunos, para que buscassem resolvê-lo, realizaram a correção por meio da exibição de uma folha de papel, na qual a resolução foi sendo elaborada.

Figura 37- Exercício



Fonte: Unioeste (2011).

Para finalizar, os estudantes foram convidados a acessar a revisão dos conteúdos disponível no *site ThingLink.* Neste momento, puderam retomar os principais conceitos abordados, bem como, ao final, responder ao formulário de *feedback* quanto à prática das docentes.

Contudo, embora o *feedback* tenha sido direcionado a todos os alunos, apenas uma resposta foi obtida. Quando questionado quais foram os pontos positivos do encontro, o (a) respondente colocou: “Inúmeros, podemos compreender melhor sobre os conteúdos de forma teórica e aplicá-los posteriormente, pondo em prática”. Na pergunta “Você acha que as docentes precisam melhorar em algum (ns) aspecto (s)? Qual (is)?”, o (a) estudante disse que não. Por fim, no espaço destinado a ideias e sugestões, o (a) aluno (a) preferiu não realizar nenhum comentário.

Portanto, num panorama geral, afirma-se que este segundo encontro foi muito importante por exigir das docentes explicações alternativas àquelas inicialmente planejadas. Na medida em que os estudantes foram manifestando suas dúvidas, as estagiárias precisaram buscar formas de saná-las, alternando desde a linguagem utilizada até os recursos visuais empregados. Desta maneira, se tornou evidente o quanto a versatilidade do professor é fundamental para a aprendizagem de seus educandos.

4.3 ENCONTRO III

4.3.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 3º ENCONTRO

(19/06/2021)

Público-Alvo:

Educandos inscritos no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT).

Tempo de execução:

2 horas e 30 minutos.

Conteúdos:

Relações e funções trigonométricas.

Objetivo Geral:

Espera-se que, por meio das aulas ministradas, os alunos mostrem-se capazes de:

- Identificar as relações trigonométricas (seno, cosseno e tangente), resolvendo problemas que as envolvem.

Objetivos Específicos:

Mediante a execução de aulas pautadas na resolução de problemas, bem como na participação ativa dos discentes, objetiva-se que os educandos se apresentem aptos a:

- Reconhecer e identificar as principais relações trigonométricas no triângulo retângulo;
- Aplicar as razões trigonométricas na resolução dos problemas contextualizados;
- Interpretar o comportamento das funções periódicas;
- Construir conceitos de domínio, imagem e período;
- Ler e interpretar a construção de gráficos relacionados ao movimento periódico.

Recursos Didáticos:

No decorrer das aulas, serão utilizados tais materiais:

Caneta, lápis, borracha, lista de exercícios, *slides,* formulários *on-line* para avaliação e controle de frequência, *software* GeoGebra, plataforma *Nearpod*, plataformas *MindMeister*, *Idroo* e *Phet – Interactive Simulations*, aplicativo *WhatsApp.*

Encaminhamento metodológico:

Com a finalidade de atingir os objetivos supracitados, serão desenvolvidas as seguintes atividades:

1. (20 minutos) Através da plataforma *Nearpod,* iniciaremos com uma atividade, e a fim de rever o conteúdo das aulas passadas.

1.1 O jogo *Time to Climb* é um *quis*, o qual permite que os alunos compitam ao mesmo tempo. Após resolverem o exercício a plataforma já mostra qual resposta correta, assim já corrigem as atividades.

Quadro 20- Jogo *Time to Climb*

Figura 38 - Jogo *Time to Climb*

Fonte: Jogo *Time to Climb*.

2. (30 minutos) Realização da atividade contida no quadro 2, a partir do acesso ao material disponível na plataforma *Nearpod*, com o intuito de fixar como se comporta os gráficos das funções trigonométricas e seus respectivos quadrantes.

2.1 – Essa atividade consiste em o aluno completar os espaços em branco (quadro 2), e logo após vamos corrigir para sanar as dúvidas.

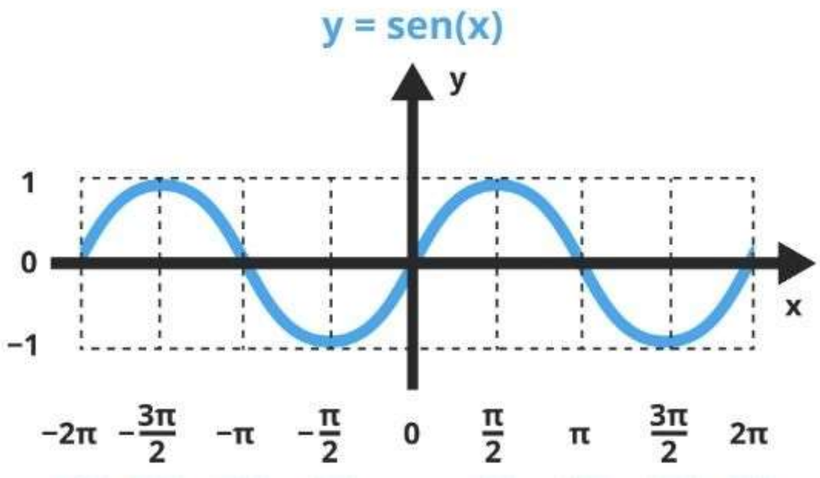
Quadro 21 - Atividade *Nearpod*

Figura 39 - Função seno - *Nearpod*

x	$f(x) = sen\ (x)$
0	
$\frac{\pi}{2}$	
π	
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	

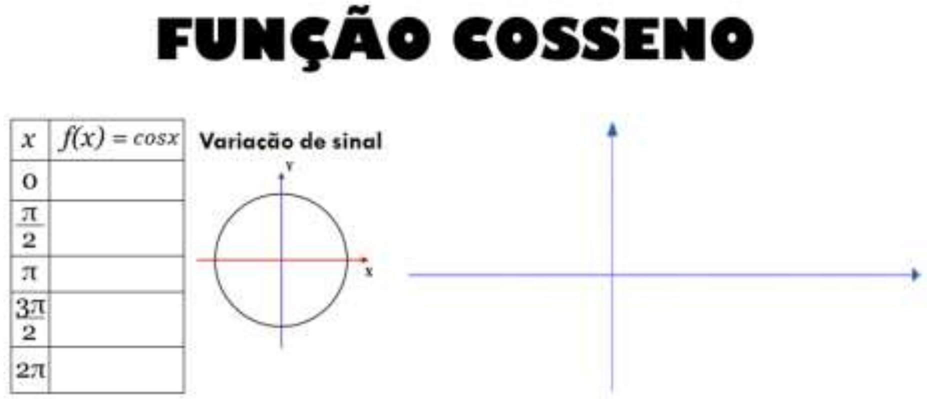
Fonte: Acervo das autoras.

Figura 40 - Gráfico seno



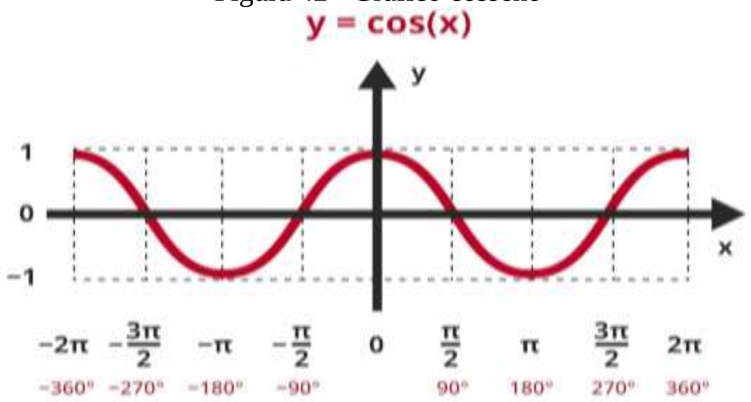
Fonte: Brasil Escola (2021).[23]

Figura 41 - Função cosseno - *Nearpod*



Fonte: Acervo das autoras.

Figura 42 - Gráfico cosseno



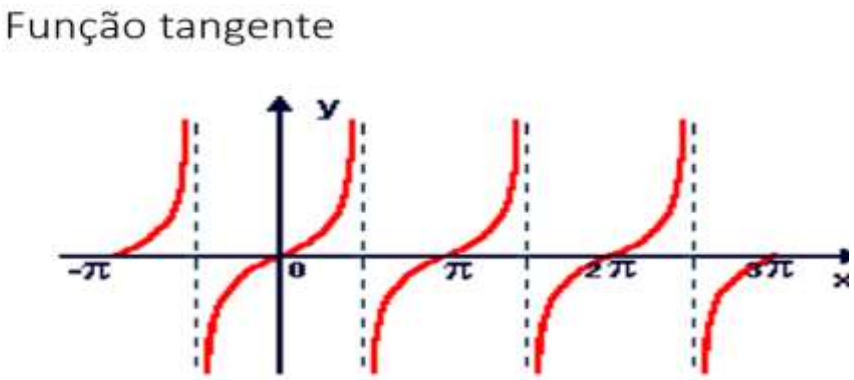
Fonte: Brasil Escola (2021).[24]

Figura 43 - Função tangente - *Nearpod*

[23] Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm

Fonte: Acervo das autoras.

Figura 44- Gráfico tangente



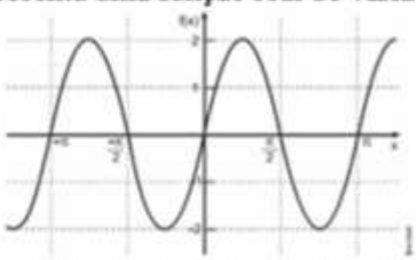
Fonte: Todo estudo (2021).[25]

Fonte: Acervo das autoras.

3- (10 minutos) Aplicação de um exercício referente ao conteúdo abordado e a correção logo após através dos *slides*. Será disponibilizado 5 minutos para os alunos resolver.

Quadro 22 - Questão

2) (UCS-RS) O gráfico abaixo representa uma função real de variável real.



Assinale a alternativa em que consta a função representada pelo gráfico.

a) $f(x) = -2\cos x$
b) $f(x) = 2cosx$
c) $f(x) = 2senx$
d) $f(x) = 2sen2x$
e) $f(x) = sen\frac{x}{2}$

---

[24] Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm
[25] disponível em: https://www.todoestudo.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas

Resolução: Observando o gráfico, podemos concluir que a curva esboçada é simétrica em relação a origem. Logo, temos alguma função com seno. O gráfico está limitado entre -2 e 2. A letra c) não está correta, porque: $2 \cdot sen\frac{\pi}{2} = 2.1 = 2$ e no gráfico temos que esse valor é igual a 0. Portanto, a alternativa correta é D.

Fonte: *Phet – Interactive Simulations* (2021).

4- (20 minutos) Retomando a definição e explicação do conteúdo através dos *slides*.

Quadro 23 - Conceitos a serem abordados

Relações trigonométricas fundamentais

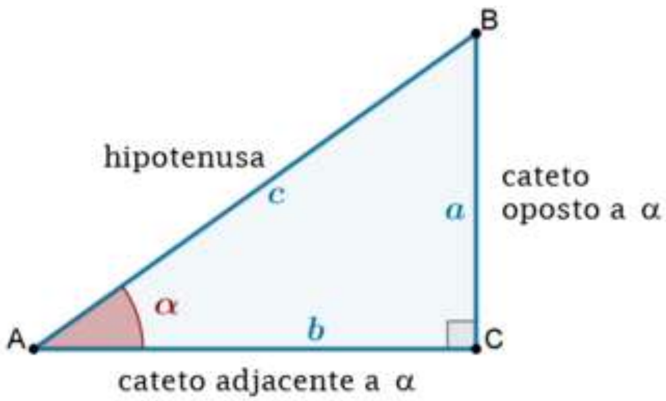
Relembrando:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Figura 45 - Triangulo retângulo



Fonte: Acervo das autoras

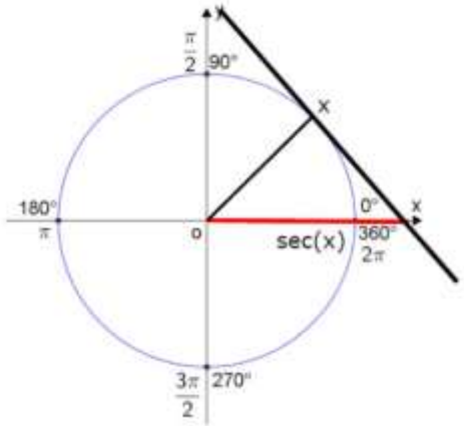
Secante

A secante de um ângulo é a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente a esse ângulo. Assim, a relação secante depende do ângulo considerado.

$$\boldsymbol{sec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}}$$

$$\boldsymbol{sec(\alpha) = \frac{1}{cos\ (\alpha)}}$$

Figura 46 - Secante



Fonte: InfoEscola (2021).

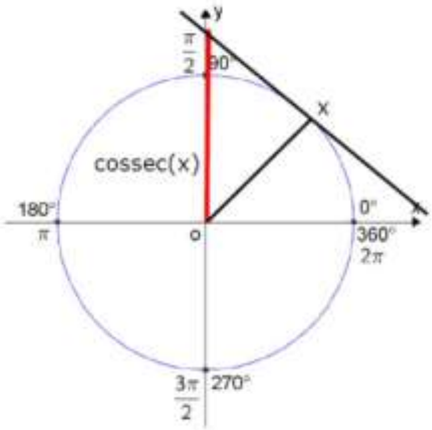
Cossecante

A cossecante de um ângulo é a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto a esse. Assim, a relação cossecante depende do ângulo considerado.

$$\boldsymbol{cossec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ oposto\ a\ \alpha}}$$

$$\boldsymbol{cossec(\alpha) = \frac{1}{sen\ \alpha}}$$

Figura 47 - Cossecante



Fonte: InfoEscola (2021).[26]

Cotangente

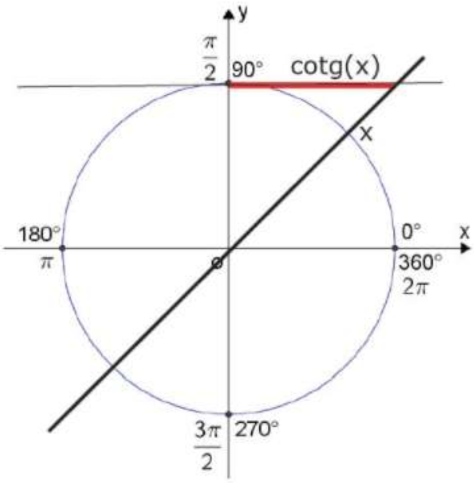
A cotangente de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto a esse ângulo. Assim, a relação cotangente depende do ângulo considerado.

$$\boldsymbol{cotg(\alpha) = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{cateto\ oposto\ a\ \alpha}}$$

$$\boldsymbol{cotg(\alpha) = \frac{1}{tg\ (\alpha)}}$$

Figura 48- Cotangente

[26] Disponível em: https://www.infoescola.com/trigonometria/cossecante/



Fonte: InfoEscola (2021).

A partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo, definem-se as funções trigonométricas do seno e cosseno. Em decorrência destas, surge a primeira relação fundamental da Trigonometria:

$$\tan(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

Essa relação é conhecida como a função trigonométrica da tangente. A segunda e talvez a mais importante das relações fundamentais da trigonometria é

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

Fonte: InfoEscola (2021).

5- (10 minutos) Aplicação de um exercício de fixação do conteúdo seguido da resolução. Será disponibilizado para os alunos 5 minutos para eles resolverem.

Quadro 24- Exercício

1- (FEI-SP 2006) Sabe-se que x é tal que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Determine o desenvolvimento do produto

$$P = (senx).(cosx).(tgx).\ (cotgx).(secx).(cossecx).$$

Resolução:

$$P = (senx).(cosx).\frac{(senx)}{(cosx)}.\ \frac{(cosx)}{(senx)}\cdot\frac{1}{(cosx)}\cdot\frac{1}{(senx)}$$

$$P = \frac{sen^2x \cdot cos^2x}{cos^2x \cdot sen^2x}$$

$$P = 1$$

Fonte: FEI-SP (2006).

6. (40 minutos) Aplicação do *Jogo do milhão* com o conteúdo abordado durante a aula. Esse jogo é uma forma de trabalhar a prática e vai contar pontos para os respectivos grupos. As questões que contemplam o jogo quadro 25.

6.1. O jogo do milhão possui 10 questões e a cada rodada vale um ponto. A resposta deverá ser discutida *WhatsApp* e repassada para as professoras regentes de cada grupo. A resolução será feita após todos os grupos responderem à questão da rodada.

Quadro 25 - Jogo do milhão.

1) Qual das relações está incorreta?

a) $sen^2x + cos^2x = 1$

b) $\text{tg}\, x = \frac{sen\, x}{\cos x}$

c) $\boldsymbol{\sec x = \frac{1}{sen\, x}}$

2) Qual das relações foi escrita corretamente?

a) $senx + cosx = 1$

b) $\boldsymbol{cotg\, x = \frac{cos\, x}{sen\, x}}$

c) $cossec\, x = \frac{1}{cos\, x}$

3) Corresponde ao domínio da função seno:

a) O conjunto dos números reais

b) O intervalo real [-1,1]

c) O conjunto dos números inteiros

4) Compreende a imagem da função da tangente:

a) Im(tg)=R

b) Im(tg)=N

c) Im(tg)={x ∈ R | x ≠ de $\frac{\pi}{2}$ + kπ; K ∈ Z}

5) Qual é o período da função seno?

a) $\frac{\pi}{2}$

b) π

c) $\boldsymbol{2\pi}$

6) Qual é o período da função cosseno?

a) $\frac{\pi}{2}$

b) π

c) $\boldsymbol{2\pi}$

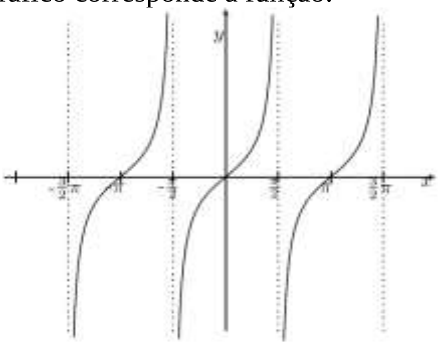
7) Qual é o período da função tangente?

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\boldsymbol{\pi}$

c) 2π

8) O gráfico corresponde a função:

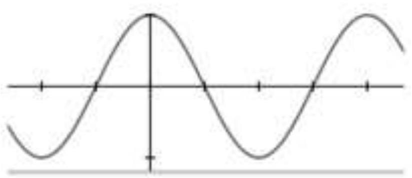


a) Seno

b) Cosseno

c) Tangente

9) A imagem se refere a:

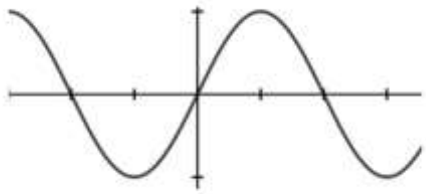


a) Função Seno

b) Função Cosseno

c) Função Tangente

10) O gráfico não corresponde a:



a) Função Seno
b) Função Cosseno
c) N.D.A

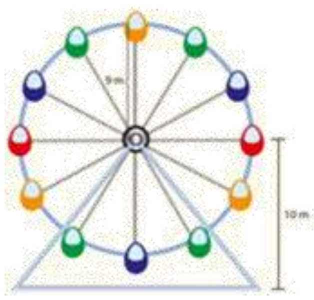
Fontes: As autoras (2021); Jose Lasa (2018).

7. (10 minutos) Aplicação de uma atividade individual para os alunos resolverem e logo após a correção do exercício.

Quadro 26 - Atividade Roda Gigante

ATIVIDADE – RODA GIGANTE

A roda gigante é uma das atrações mais tradicionais dos parques de diversões. A roda gigante da figura tem 12 cadeiras igualmente distribuídas ao longo da circunferência, que tem 9 m de raio. Uma estrutura de ferro sustenta a roda gigante a partir do seu centro, mantendo-a presa ao solo. A distância do centro da roda gigante ao solo é 10 m.



Sabendo que a roda gigante gira lentamente a uma velocidade de 3º por segundo responda:
Qual a expressão que descreve matematicamente a altura, em relação ao solo, de uma pessoa t segundos após entrar na roda gigante?

a. No início do passeio, em que altura se encontra o passageiro?
b. A que altura se encontra o passageiro após 30 segundos do início?
c. Qual é a altura mínima e máxima que esse passageiro atinge no passeio?
d. Em quantos segundos o passageiro atinge a altura máxima?
e. Qual o tempo necessário para a roda gigante dar uma volta completa?
f. Considerando que o passeio demora 8 minutos. Quantas voltas completas ocorrem no passeio?
g. Trace o gráfico da função.
h. Indique o domínio, imagem e período da função.

Fonte: Conexões com a Matemática (Adaptado).

8- (10 minutos) Realização das considerações finais, isto é, momento para a disponibilização de uma lista com exercícios complementares e da revisão dos principais tópicos trabalhados. Em outras palavras, esta última se dará por meio do acesso à plataforma *MindMeister*[27], na qual os estudantes

[27] Disponível em: https://mm.tt/1863815691?t=Mt79qOG6YQ. Acesso em: 25 maio 2021.

poderão visualizar um mapa conceitual preparado pelas docentes (figura 2). Também, neste momento, os estudantes serão convidados a fornecer um *feedback* da prática docente. Para tanto, deverão responder, no grupo da turma, no *WhatsApp*, às perguntas elencadas no quadro 28. Entretanto, apenas *emojis* ou figurinhas deverão ser utilizados.

Quadro 27- Lista de Exercícios Complementar

Lista de Exercícios Complementar

1) (UFAL) O seno de um arco de medida 2340º é igual a

a) -1

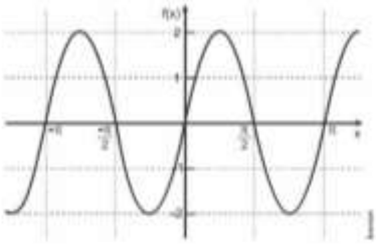
b) $-\frac{1}{2}$

c) **0**

d) $\frac{\sqrt{(3)}}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

2) (UCS-RS) O gráfico abaixo representa uma função real de variável real.



Assinale a alternativa em que consta a função representada pelo gráfico.

a) $f(x) = -2\cos\, x$

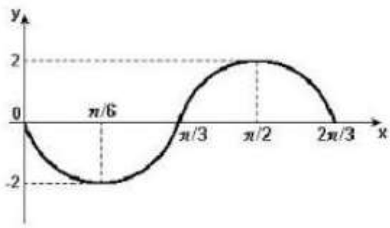
b) $f(x) = 2cosx$

c) $f(x) = 2senx$

d) $\boldsymbol{f(x) = 2sen2x}$

e) $f(x) = sen\frac{x}{2}$

3) (Vunesp-SP) Observe o gráfico.



Sabendo que ele representa uma função trigonométrica, a função y(x) é

a)$-2\cos\,(3x)$

b)$-2sen(3x)$

c)$2\cos\,(3x)$

d)$3sen(2x)$

e)$3\cos\,(2x)$

4) (UFRGS) O gráfico da função f, definida por $f(x) = cosx$, e o gráfico da função g, quando representados no mesmo sistema de coordenadas, possuem somente dois pontos em comum. Assim, das alternativas abaixo, a que pode representar a função g é

a) $g(x) = (senx)^2 + (cosx)^2$

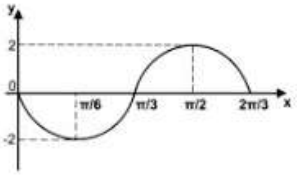
b) $\boldsymbol{g(x) = x^2}$

c) $g(x) = 2^x$

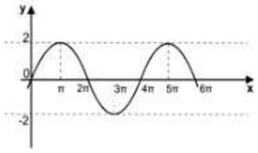
d) $g(x) = logx$

e) $g(x) = senx$

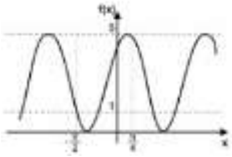
5) (UPE) Qual dos gráficos a seguir representa a função $f(x) = -2\; sen\; 3x$?



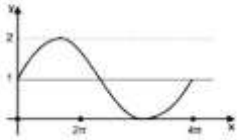
a)



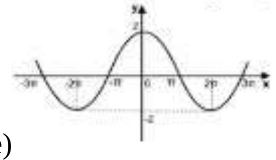
b)



c)



d)



e)

Fontes: UFAL (2000); UCS (2016); UFRGS (2015); UEP (2015),

Quadro 28 - Enquete

Feedback
1. O que você considera sobre os recursos utilizados pelas docentes (*Phet*, *Idroo*, *slides*...)?   2. Qual a sua opinião em relação ao ritmo com que a aula foi conduzida?   3. Suas expectativas para essa aula foram alcançadas?

Fonte: As autoras.

Avaliação:

A avaliação dos estudantes será baseada em sua participação durante as atividades propostas. Além disso, de modo a obter-se um *feedback* quanto à prática docente, os alunos deverão participar da enquete no grupo da turma, no *WhatsApp.*

Referências:

ALVES, Diego**. A TRIGONOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA O ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA**. 2017. 68 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017.

CASA DAS QUESTÕES. **Trigonometria no Triângulo Retângulo, Geometria plana**. Disponível em: https://acasadasquestoes.com.br/simulado/matematica/trigonometria-notrianguloretangulo#.WypXPqdKjIU . Acesso em: 25 jun. 2020. TADEU, Walter. Exercícios do Ensino Médio. Disponível em: http://professorwaltertadeu.mat.br/exerciciosEM2014.html . Acesso em: 25 jun. 2020.

DANTAS, Fábio Alvaro, **Razões Trigonométricas na Circunferência**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ca7jftnh. Acesso em: 23 abr. 2021.

DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilce. Matemática e ciência e aplicações: Volume 2 Ensino médio. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

EXERCÍCIOS SOBRE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS - DESCOMPLICA. Disponível em: https://descomplica.com.br/d/vs/matematica/trigonometria/funcoestrigonometricas/aula/exercicios de-funcoes-trigonometricas-seno-cosseno-e-tangente/ . Acesso em: 25 jun. 2020.

GRAFICO DE FUNÇÕES: SENO, COSSENO E TANGENTE - Dinâmica 6. 1ª Série | 4º Bimestre. DISCIPLINA. Série. CAMPO. CONCEITO. Matemática. 1a do Ensino Médio. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/recurso/12540. Acesso em: 25 jun. 2020.

LEONARDO, Fabio Martins de. **CONEXÕES COM A MATEMÁTICA**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **MATEMÁTICA PAIVA.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

TOUR TRIGONOMÉTRICO. Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/trigtour/latest/trig-tour_pt_BR.html. Acesso em: 25 jun. 2020.

4.2.2 Relato III

Relatório Promat –Terceiro Encontro

Aos dezenove dias do mês de junho do corrente ano, as estagiárias Fernanda Carla de Oliveira, Karla Katrine Pereira Cazarotto e Nadya Beatriz Antunes Barroso, da quarta série do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel, realizaram, sob a orientação da professora Pamela Gonçalves, sua terceira prática no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (Promat), que neste ano, ocorre virtualmente, por meio da plataforma *Jitsi*.

A fim de dar início ao encontro, as estagiárias realizaram uma revisão dos conceitos de arco, ângulo, graus e radianos, assim como das relações no círculo trigonométrico. Tal revisão se deu por meio do jogo *Time to Climb,* da plataforma *Nearpod.* Simultaneamente, os estudantes responderam às questões previamente elaboradas pelas docentes. Ao término da atividade, os alunos manifestaram sua satisfação com relação ao jogo.

Figura 49- Time to Climb

Fonte: As autoras.

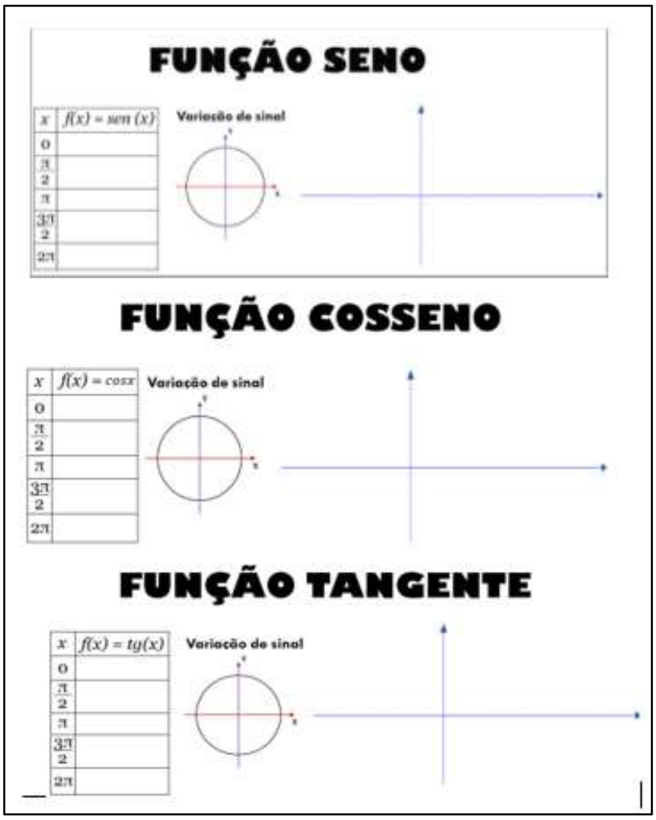
No mais, as estagiárias seguiram com o conteúdo de funções trigonométricas. De modo a retomar os sinais e apresentar o domínio, a imagem e o período das funções seno, cosseno e tangente, os estudantes permaneceram no *Nearpod*, onde as atividades foram propostas. É válido destacar que, por meio da plataforma, os estudantes tiveram acesso aos *slides* e atividades em seus próprios computadores e/ou *smartphones*. Desta forma, conforme os comandos das docentes, puderam interagir e realizar os exercícios ainda dentro do *site*.

Inicialmente, as acadêmicas disponibilizaram um *slide* contendo uma tabela com alguns pontos, um círculo trigonométrico e os eixos do plano cartesiano. Com base na função seno, os estudantes completaram a tabela, dispondo os valores da função para os pontos dados. Além disso, anotaram no círculo os sinais da função e traçaram um esboço do gráfico. Neste momento, alguns alunos alegaram dificuldade em desenhar pelo celular. As docentes, então, propuseram que estes realizassem a tarefa em uma folha à parte e, em seguida, enviassem a foto de sua resolução pela plataforma.

Posteriormente, as estagiárias fomentaram um diálogo com estudantes, no intuito de formalizar as informações referentes aos sinais, período, domínio e imagem da função trabalhada. Ademais, o gráfico da plataforma *Phet* foi exibido, permitindo que os alunos o comparassem com os esboços produzidos.

Quanto às funções cosseno e tangente, a mesma sequência foi realizada.

Figura 50 - Estudo das funções no *Nearpod*



Fonte: As autoras.

Com o auxílio de *slides*, bem como de anotações realizadas em um quadro branco, as relações trigonométricas fundamentais foram deduzidas a partir do círculo trigonométrico. Na sequência, um exercício sobre o assunto foi proposto e, dados alguns instantes, corrigido com a turma.

De modo a fixar os conteúdos abordados no encontro, as docentes dividiram a turma em três equipes, com o fim de que todas pudessem contar com o acompanhamento de uma delas. Assim, todos foram orientados a ingressar em seus respectivos grupos no *WhatsApp*, os quais foram criados antecipadamente pelas acadêmicas. Esse foi o canal de comunicação entre os membros de cada uma das equipes.

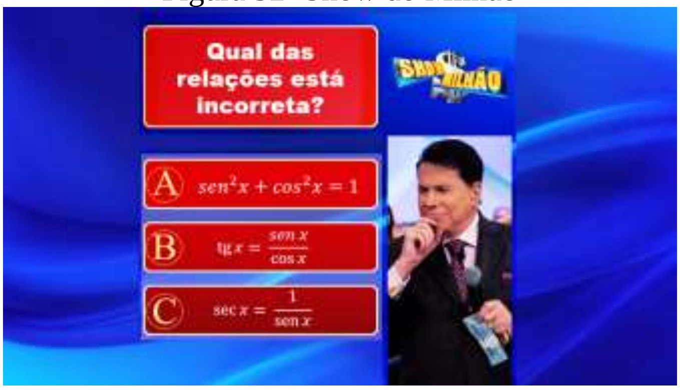
Com tudo devidamente organizado, as estagiárias deram início ao Show do Milhão, uma competição de perguntas e respostas. A cada rodada, uma equipe escolhia um cartão que poderia render bônus ou ônus ao seu time. Na sequência, ao passo em que uma pergunta era realizada, todos tinham dois minutos e trinta segundos para discutir e escolher uma das alternativas mencionadas. Passado o tempo, a resposta correta era revelada, a fim de que as docentes computassem a pontuação da equipe que estava sob sua responsabilidade.

O jogo seguiu de tal maneira até o término das dez rodadas preparadas pelas docentes. Todavia, houve empate entre as três equipes.

Figura 51- Cartões do jogo

Fonte: As autoras.

Figura 52- Show do Milhão



Fonte: As autoras.

Aproveitando o engajamento dos estudantes, as estagiárias optaram por propor um desafio de desempate, em que, durante a semana subsequente ao encontro, os alunos, em parceria com as suas equipes, deveriam resolver o problema da roda-gigante (questões referentes às funções trigonométricas). Conforme combinado, aqueles que apresentassem a resolução, garantiriam mais um ponto à sua equipe. A correção, no entanto, se daria no quarto encontro.

No intuito de saber dos discentes sua opinião sobre o encontro, as estagiárias propuseram, no grupo da turma, no *WhatsApp*, uma atividade em que, a cada pergunta realizada, os alunos deveriam responder com as figurinhas ou os *emojis* que julgassem apropriados. Devido à grande participação dos alunos, foram obtidas uma série de respostas. No quadro 29, pode-se verificar algumas delas.

Quadro 29- *Feedback*

<table>
<tr><th>Perguntas</th><th>Respostas</th></tr>
<tr><td>O que você considera sobre os recursos utilizados (slides, Nearpod, WordWall...)?</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Qual sua opinião em relação ao ritmo com que a aula foi conduzida?</td><td>



</td></tr>
<tr><td>Suas expectativas para essa aula foram alcançadas?</td><td>


</td></tr>
</table>

Fonte: As autoras.

Mediante as respostas positivas dos estudantes e ao sucesso do jogo, as estagiárias viram, nessa atividade, uma considerável maneira de despertar o interesse e promover uma participação mais efetiva por parte de seus alunos. A experiência mostrou que, mais do que o contato com recursos tecnológicos, os estudantes necessitam do contato entre si. Assim sendo, dentro dos limites impostos pelo distanciamento social, optaram por tornar a competição um momento fixo nos encontros, em prol de continuar garantindo a interação e o desempenho dos estudantes.

5. MÓDULO II

5.1 ENCONTRO IV

5.1.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 4º ENCONTRO
(26/06/2021)

Público-Alvo:

Educandos inscritos no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT).

Tempo de execução:

2 horas e 30 minutos

Conteúdo:

Geometria analítica, estudo do ponto.

Objetivo Geral:

Espera-se que, por meio das aulas ministradas, os alunos mostrem-se capazes de:

- Explorar o plano cartesiano bem como suas partes, determinando a distância entre dois pontos e o ponto médio de um segmento.

Objetivos Específicos:

Mediante a execução de aulas pautadas na resolução de problemas, bem como na participação ativa dos discentes, objetiva-se que os educandos se apresentem aptos a:

- Explorar o plano cartesiano, bem como suas partes;
- Localizar pontos no plano cartesiano;
- Determinar a distância entre dois pontos;
- Determinar o ponto médio de um segmento.
- Identificar o alinhamento de pontos.

Recursos Didáticos:

No decorrer das aulas, serão utilizados tais materiais:

Lápis, borracha, caderno *slides*, *WhatsApp*, plataforma *Wordwall*, plataforma *GeoGebra*

Encaminhamento metodológico:

Com a finalidade de atingir os objetivos supracitados, serão desenvolvidas as seguintes atividades:

1. (20 minutos) Correção do exercício desafio que foi atribuído para os alunos na aula anterior, que contará pontos para cada grupo.

Quadro 30 - Questões desafio

a) Qual a expressão que descreve matematicamente a altura, em relação ao solo, de uma pessoa t segundos após entrar na roda gigante?

b) No início do passeio, em que altura se encontra o passageiro?

c) A que altura se encontra o passageiro a 30 segundos do início?

d) Qual a altura mínima e máxima que esse passageiro atinge o passeio?

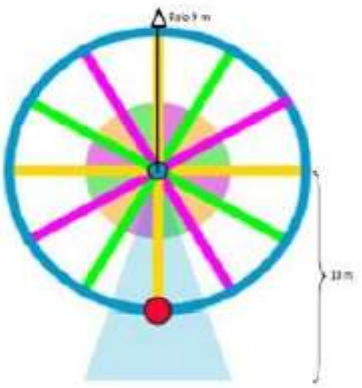
e) Em quantos segundos o passageiro atinge a altura máxima?

f) Qual o tempo necessário para a roda dar uma volta completa?

g) Considerando que o passeio demore 8 minutos. Quantas voltas completas ocorrem no passeio?

h) Trace o gráfico da função.

i) Indique o domínio, imagem e período da função.



Fonte: Jhonatan Mozon (2018).

2 – (10 minutos) Definição do conteúdo de estudo da reta através dos *slides*.

Quadro 31 - Definições

René Descartes

René Descartes (1596-1650),
Matemático e filósofo francês
Criador da parte da Matemática que relaciona as ideias da Álgebra com a Geometria, chamada de Geometria Analítica.
Em sua homenagem, o sistema de coordenadas foi denominado **plano cartesiano.**

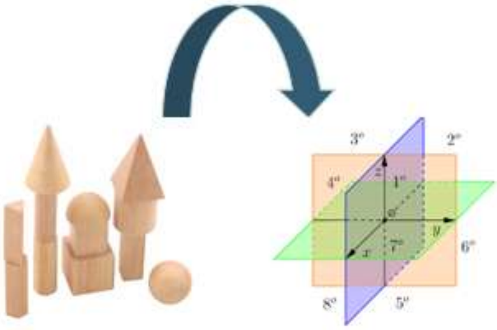
Figura 53 - René Descartes

Fonte: Emily Viana (2021).[28]

Definição

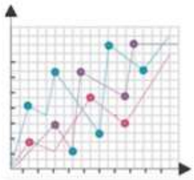
A Geometria Analítica trata das relações entre as equações algébricas e os objetos geométricos, buscando a simplificação da técnica dos problemas geométricos e a interpretação geométrica dos resultados obtidos nos cálculos algébricos.

Figura 54 - Objetos geométricos



Fonte*:* Acervo das autoras.

Aplicação







[28] Disponível em: https://conhecimentocientifico.r7.com/rene-descartes/

Ponto

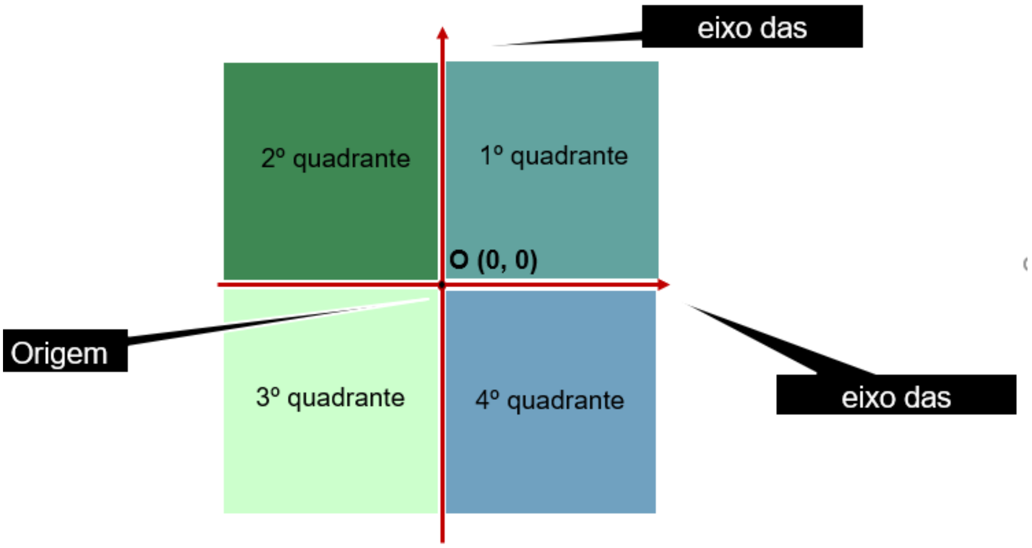
Em Matemática, particularmente na Geometria e na Topologia, um ponto é uma noção primitiva pela qual outros conceitos são definidos.
Um ponto determina uma posição no espaço.
Na Geometria, pontos não possuem volume, área, comprimento ou qualquer dimensão semelhante.
Nomeamos um ponto por uma letra maiúscula do alfabeto latino.

Figura 55- Pontos

Fonte: Acervo das autoras.

Plano cartesiano

Figura 56 - Quadrantes



Fonte: Acervo das autoras.

Coordenadas do plano

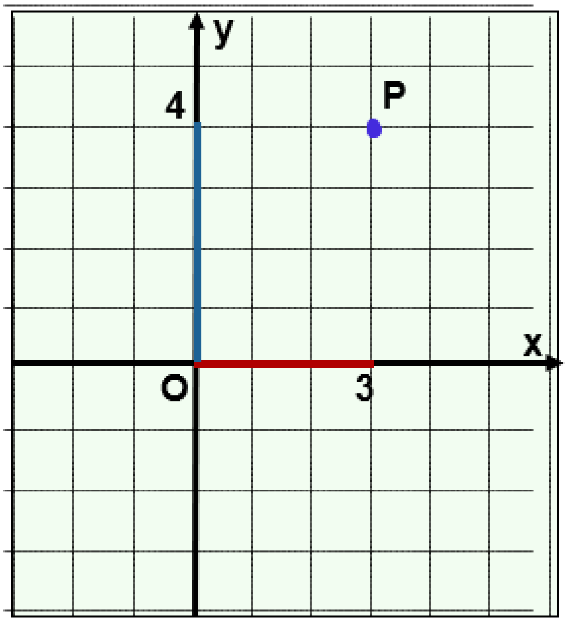
P(3, 4) ou P(x, y)

3 é a abscissa de P;

4 é a ordenada de P;

3 e 4 são as coordenadas de P;

Figura 57- Plano cartesiano

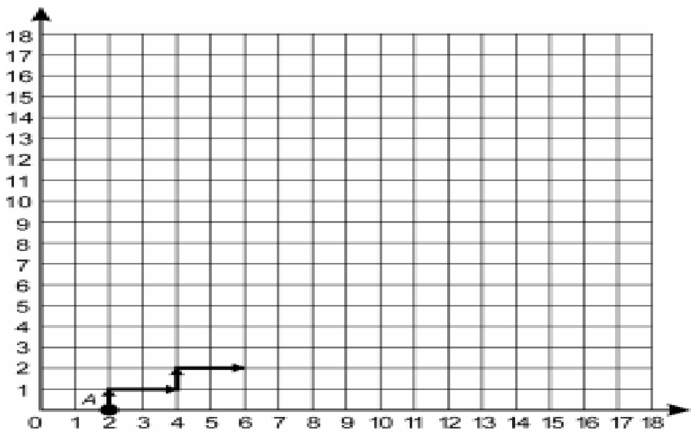


Fonte: Acervo das autoras.

3. (10 minutos) Atribuiremos aos alunos um exercício para fixação do conteúdo e em seguidas, vamos corrigir através dos *slides* exposto no quadro 32.

Quadro 32 - Exercício

(ENEM 2009) O gráfico mostra o início da trajetória de um robô que parte do ponto A (2; 0), movimentando-se para cima ou para a direita, com velocidade de uma unidade de comprimento por segundo, no plano cartesiano. O gráfico exemplifica uma trajetória desse robô, durante 6 segundos.



Supondo que esse robô continue essa mesma trajetória, qual será sua coordenada, após 18 segundos de caminhada, contando o tempo a partir do ponto A?

Resolução:

Analisando o gráfico, veremos que, em 6 segundos, o robô andou 4 unidades no eixo das abcissas e 2 unidades no eixo das ordenadas. Então, partindo do ponto A, e mantendo a mesma trajetória, sabemos que 18 é o triplo de 6, então, em 18 segundos, o robô vai andar $4 \cdot 3 = 12$ unidades no eixo x e $2 \cdot 3 = 6$ unidades no eixo y. Sabendo que ele parte do ponto (2, 0), temos que:

$P(2 + 12;\ 0 + 6)$ $P(14;\ 2)$

Fonte: Inep (2009).

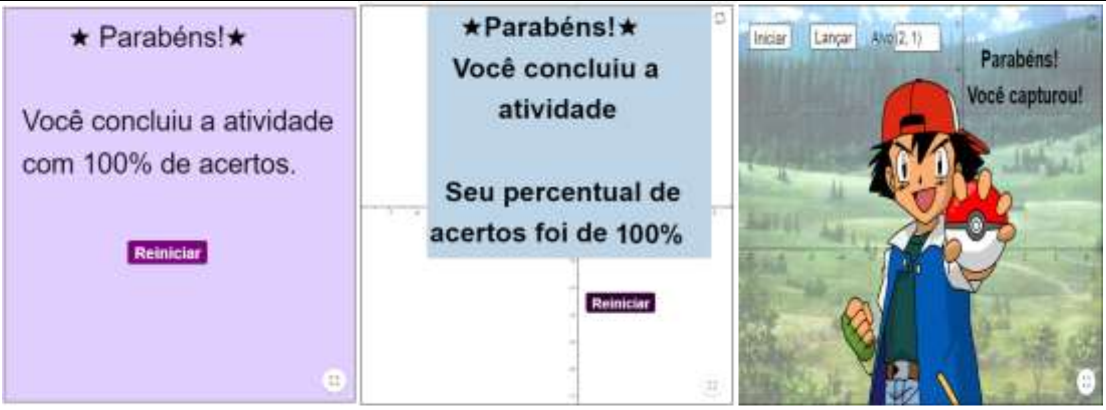
4- (15 minutos) Aplicação de uma atividade pratica referente ao conteúdo com auxílio do G*eogebra.* Solicitaremos aos alunos para acessarem o link[29], e explicaremos as atividades. Os exercícios contaram pontos para os grupos dos alunos.

4.1 Primeira atividade consiste, que todos os alunos acessem a plataforma do *Geogebra* e responda quais os quadrantes pertencem ao ponto A. Após responderem todas as 10 questões, a plataforma informa quantos pontos ganharam e devem informar as professoras.

4.2 Segunda atividade consiste em um jogo que precisa identificar a localização dos pontos de interseção da reta com os eixos cartesianos. Após responderem todas as 10 questões, a plataforma informa quantos pontos ganharam e devem informar as professoras

4.3 Terceira atividade consiste em um plano cartesiano, aonde em um ponto desse plano tem um pokemon, onde devem lançar uma bola com as coordenadas corretas no plano para capturá-lo.

Quadro 33 - Atividades *GeoGebra*



Fonte: GeoGebra (2021).

5- (15 minutos) Retomada das definições do conteúdo através dos *slides*.

Quadro 34- Distância entre dois pontos

Distância entre dois pontos
Para obter a distância AB entre os pontos $A(x_A,\ y_A)$ e $B(x_B,\ y_B)$ plano xOy. Aplica-se o teorema de Pitágoras no triângulo ABC.

[29] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/g8vc86xe#; https://www.geogebra.org/m/aaskepxt.

$$BC = |xB - xA|$$

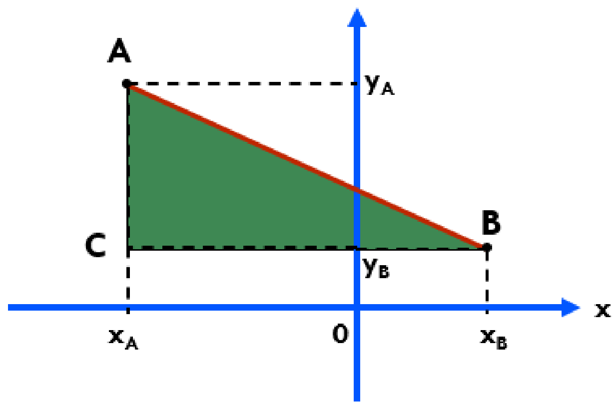
$$AC = |yB - yA|$$

$$(AB)2 = (BC)2 + (AC)2$$

$$(AB)2 = |xB - xA|2 + |yB - yA|2$$

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

Figura 58 - Distância entre dois pontos.



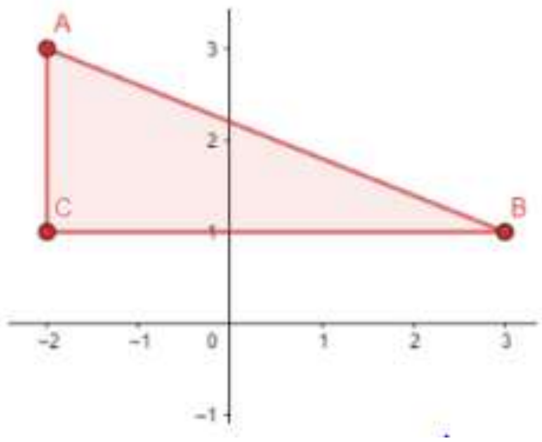
Fonte: Acervo das autoras.

Fonte: Matematikando (2012); As autoras (2021).

6- (5 minutos) Aplicação de um exemplo para os alunos exposto no quadro 35;

Quadro 35 - Exemplo

Um triângulo é formato pelos pontos A(-2, 3), B(3, 1) e C(-2, 1) no plano cartesiano, calcule a área e o perímetro deste triângulo em centímetro



Resolução:

Primeiro, calculamos as distâncias AC e BC.

$$AC = (3 - 1) = 2\,cm.$$

$$BC = (3 - (-2)) = 5\,cm.$$

Para calcular o perímetro precisamos saber a medida do lado AB. Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$$(AB)^2 = 2^2 + 5^2$$

$$(AB)^2 = 4 + 25$$

$(AB) = \sqrt{29} = 5{,}385\,c.$

Fonte: Alyne Queiroz (2020).

7-(10 minutos) Retomada das definições através dos *slides* e seguido de um exemplo para a formalização do conteúdo.

Quadro 36- Definições

Ponto médio de um segmento

Seja M o ponto médio do segmento AB com extremidades nos pontos A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B). M possui coordenadas (x_M, y_M).

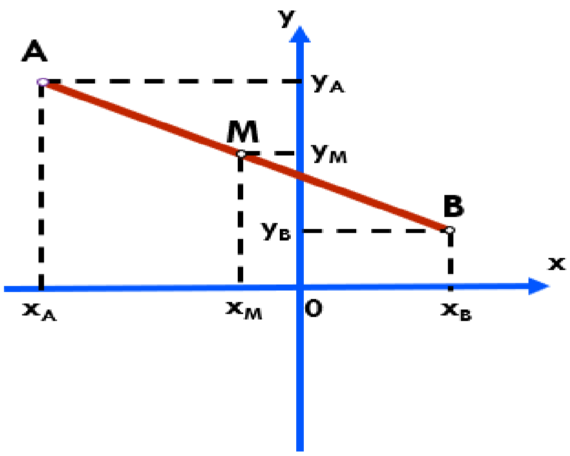
x_M é a média aritmética de x_A e x_B $\boldsymbol{x_M = \frac{x_A+x_B}{2}}$

yM é a média aritmética de yA e yB $\boldsymbol{y_M = \frac{y_A+y_B}{2}}$

Portanto, sendo M o ponto médio do segmento AB, temos:

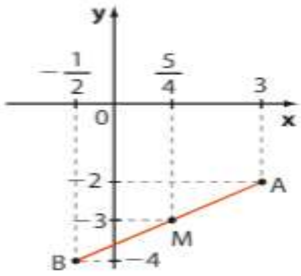
$\boldsymbol{M = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)}$

Figura 59- Ponto médio de um segmento.



Fonte: Acervo das autoras.

Dado os pontos A(3,-2) e B $\left(\frac{-1}{2},\ -4\right)$, vamos calcular as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



Resolução:

$$\boldsymbol{x_M} = \frac{\frac{-1}{2}+3}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\boldsymbol{y_M} = \frac{(-2)+(-4)}{2} = \frac{-6}{2} = \mathbf{-3}$$

Fonte: Passei direto (2021); As autoras (2021).

8 – (10 minutos) Aplicação de um exercício referente ao conteúdo abordado e logo após a correção através dos *slides*.

Quadro 37- Questões

(Unioeste 2012) Dado o ponto A(–2, 4), determine as coordenadas de dois pontos P e Q, situados, respectivamente, sobre as retas y = 3x e y = – x, de tal modo que A seja o ponto médio do segmento PQ.

Resolução:

Seja P = (a, b) e Q = (c, d)

$$\frac{(a+c)}{2} = -2 \leftrightarrow a + c = -4$$

$$\frac{(b+d)}{2} = 4 \leftrightarrow b + d = 8$$

Somando a + b + c + d = 4

P pertence a reta y = 3x

$y = 3x \leftrightarrow b = 3a$

Q pertence a reta $y = -x \rightarrow y = -x \leftrightarrow d = -c$

Substituindo em: a + b + c + d = 4

$$a + 3a + c - c = 4$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

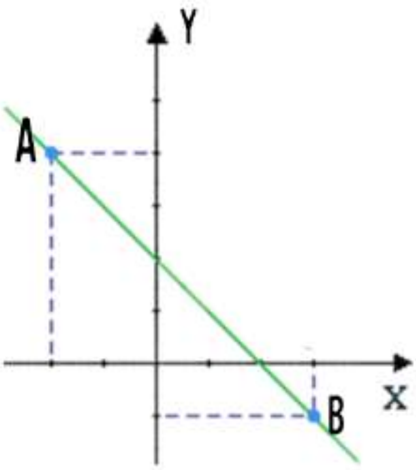
$$Logo, b = 3, c = -5\ e\ d = 5$$

Fonte: Unioeste (2012).

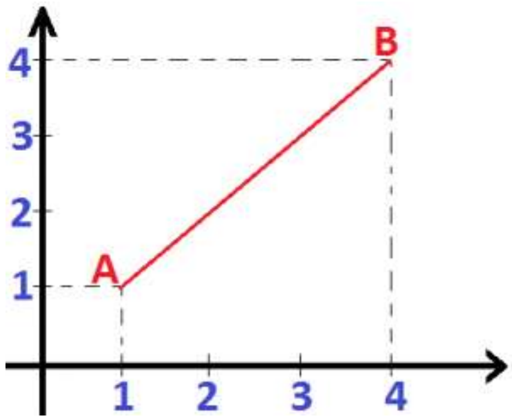
9- (10 minutos) Aplicaremos uma atividade na plataforma *Wordwall*, referente ao conteúdo de ponto médio. Todos os alunos devem acessar simultaneamente o *quiz* na plataforma, e o grupo com maior pontuação, acrescentara alguns pontos nas atividades avaliativas para a disputa dos grupos.

Quadro 38 - Atividade *Wordwall*

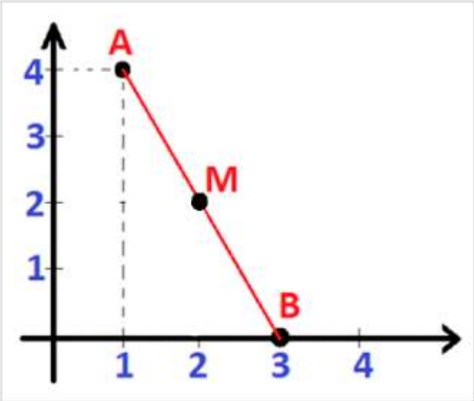
1- Para obter a distância entre pontos qual teorema usamos?
a) Formula Bhaskara
b) Teorema de tales
c) Teorema de Pitágoras
d) nenhuma das alternativas
2- Qual a média aritmética de x?
a) $\frac{x_a - x_b}{2}$ b) $\frac{x_a . x_b}{4}$ c) $\frac{x_a . x_b}{2}$ **d)** $\boldsymbol{\frac{x_a + x_b}{2}}$
3- Quais coordenadas o gráfico apresenta para o ponto A e B?



a) A(4, 2) e B(2 -1)
b) A(2,4) e B(1,7)
c) A(-2, 4) e B(3, -1)
d) A(4, 2) e B(2 -1)
4- Qual o ponto médio de A(1,1) B(4,4)?



a) 2 b) 4 c) 3,2 **d) 2,5**
5- Quais são as coordenadas de M (x,y)?



a) M(2,2) b) M (2,4) c) M(4,2) d) (2,-2)

Fonte: As autoras.

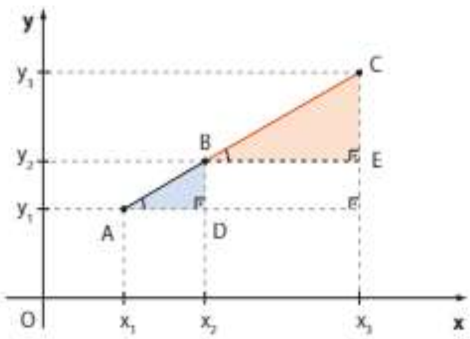
10- (15 minutos) -Retomada de conteúdo e aplicação de 2 exemplos através dos *slides*.

Quadro 39 - Exemplos

Pontos colineares

Para que três pontos distintos estejam alinhados, suas coordenadas devem obedecer a seguinte condição: A($x_1,\ y_1$), B($x_2,\ y_2$) e C($x_3,\ y_3$) devem estar na mesma reta.

Figura 60 - Pontos colineares

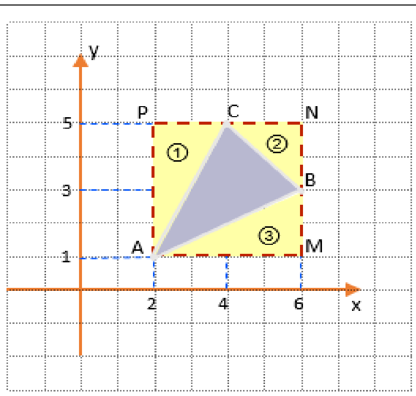


Se três pontos distintos A ($x_1,\ y_1$), B ($x_2,\ y_2$) e C ($x_3,\ y_3$) são colineares então seu determinante deve ser igual a zero.

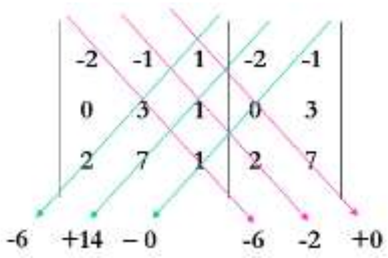
$$D = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Exemplo 1:

Na figura, os pontos não-alinhados A(2, 1), B(6, 3) e C(4, 5).



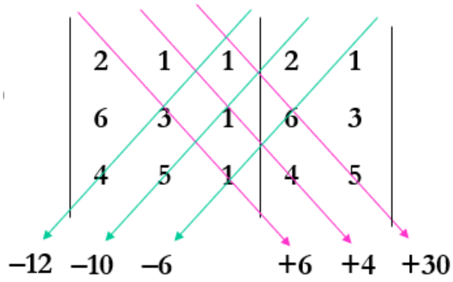
Resolução:



D = 8 - 8 = 0

Exemplo 2:

Na figura, os pontos não-alinhados A(2, 1), B(6, 3) e C(4, 5).



D = – 28 + 40 = 12

Fonte: Marcos Rigonatto (2021).

11. (10 minutos) Aplicação de um exercício para a fixação do conteúdo.

Quadro 40 - Exercícios II

Exercício 2

(PUC-RJ) Os pontos (0, 8), (3, 1) e (1, y) do plano são colineares. O valor de y é igual a***:***

Resolução:

Os pontos (0,8), (3,1) e (1, y) são colineares, então eles pertencem a **mesma reta.**

Resolução:

Os pontos (0,8), (3,1) e (1, y) são colineares, então eles pertencem a **mesma reta.** A E**quação reduzida da reta** é da forma y = ax + b. Vamos achar a equação da reta que passa pelos pontos **(0,8) e (3,1).**

$$\begin{cases} \boldsymbol{b = 8} \\ \boldsymbol{3a + b = 1} \end{cases}$$

$\boldsymbol{3a + 8 = 1 \rightarrow 3a = 1 - 7 \rightarrow a = -\frac{7}{3}}$

A E**quação da reta** é $y = -\frac{7x}{3} + 8$.

Substituindo x por 1.

$$y = -\frac{7x}{3} + 8 \rightarrow y = -\frac{7 \cdot 1}{3} + 8 \rightarrow y = \frac{17}{3}$$

Logo o terceiro ponto $(1, \frac{17}{3})$

Fonte: PUCRJ (2000).

12 - (10 minutos) Aplicaremos uma atividade na plataforma *Wordwall*, referente ao conteúdo de ponto colineares e área dos polígonos. Todos os alunos devem acessar simultaneamente o *quiz* na plataforma, e o grupo com maior pontuação, acrescentara alguns pontos nas atividades avaliativas para a disputa dos grupos.

Quadro 41 - Questões *Wordwall* II

Questões *Wordwall*

1- Três pontos são colineares quando o seu determinante é:
a) 3
b) 2
c) 1
d) 0
2- Os pontos A (0,5), B (1,3) e C (2,y) são colineares. Logo, a coordenada de C é:
a) 0
b) 1,5
c) 2
d) 1
3) Os pontos A (x, 5), B (3, 7) e C (5, 11) estão alinhados. Portanto, x é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
4 - O valor de x para que os pontos A = (x, 5), B = (-2,3) e C = (4,1) sejam alinhados é:
a) 8
b) 6
c) -5
d) -8

Fonte: Milena Conolly (2018).

13. (10 minutos) Aplicação de um exercício para a ficção do conteúdo.

Quadro 42 - Exercício

Exercício 3

(UFMG) Determine o valor de m para que os pontos A(2m+1, 2), B(–6, –5) e C(0, 1) sejam colineares.

Resolução:

Achar o determinante:

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & 2 & 1 \\ -6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-5(2m+1) - 6 - 2m - 1 + 12 = 0$$

$$-10m - 5 - 6 - 2m - 1 + 12 = 0$$

$$-8m = 12 - 12 \rightarrow m = 0$$

Logo o determinante é igual a 0.

Fonte: UFMG (2014).

Avaliação:

A avaliação dos estudantes se desenvolverá no decorrer das aulas, no desenvolvimento das atividades, participação durante a resolução dos problemas por meio das respostas orais, registros e análises individuais nas folhas.

Referências:

BUENO, Daisy Luci Regiani. **Aprendendo em que situações pode-se usar O Ponto estudado na Geometria Analítica**. 2013. 2 v. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Paraná - Unespar – Campus de Paranavaí, Santa Isabel do Ivaí, 2013.

CADERNO DE EXERCICIOS – OBEMEP. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/h33tf5r3nqgoc.pdf. Acesso em: 27 jul. 2020.

EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA ANALITICA. Disponível em: https://professorwaltertadeu.mat.br/ProfEmanuelGeoAnPonto2016.doc. Acesso em: 27 jul. 2020.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilce. **Matemática e ciência e aplicações: Volume 3. Ensino médio**. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática**. Vol. 3. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. MATEMÁTICA PAIVA. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

5.1.2 Relato IV

Relatório Promat – Quarto Encontro

No dia vinte e seis de junho do corrente ano, as estagiárias Fernanda Carla de Oliveira, Karla Katrine Pereira Cazarotto e Nadya Beatriz Antunes Barroso, da quarta série do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel, realizaram, sob a orientação da professora Pamela Gonçalves, mais uma prática no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (Promat), que neste ano, ocorre virtualmente, por meio da plataforma *Jitsi*.

De maneira a dar início ao quarto encontro, as docentes verificaram quais equipes haviam cumprido o desafio atribuído na aula anterior. Dois, dos três grupos, realizaram a atividade, o que lhes rendeu mais alguns pontos na competição.

Sequencialmente, as estagiárias realizaram, com o auxílio de *slides*, a correção do referido desafio, que se tratava de uma sequência de questões sobre função trigonométrica na roda gigante.

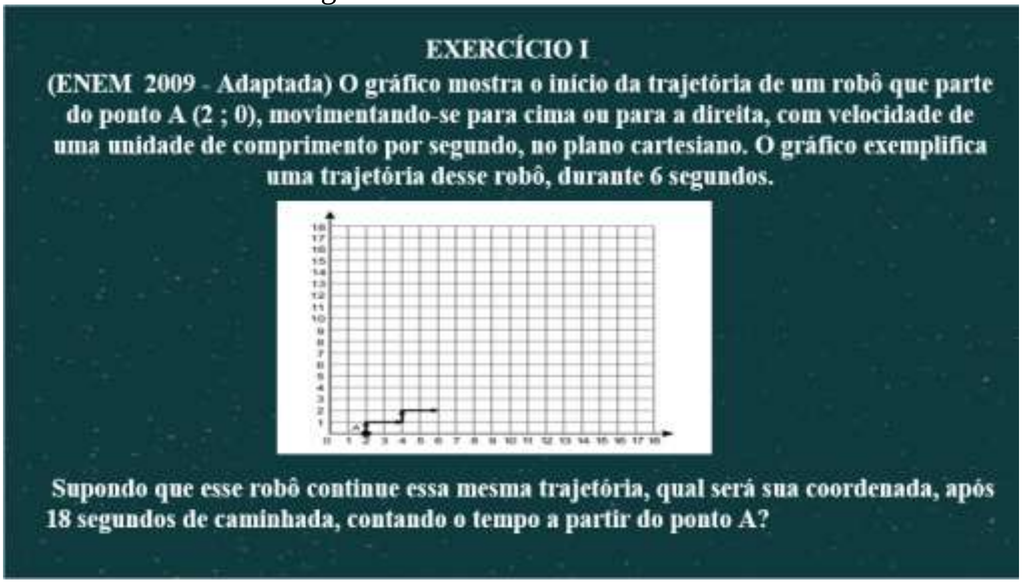
Figura 61-Desafio

Fonte: Adaptado de Fábio Martins de Leonardo (2013).

Durante a correção, foi notado alguns problemas na formulação do exercício, especialmente em se tratando da relação entre o tempo e a posição do carrinho, comprometendo sua resolução. Como forma de contornar a situação, as estagiárias se comprometeram em disponibilizar um vídeo com a correção do exercício, já com as devidas alterações efetuadas. Após, as acadêmicas iniciaram, com os estudantes, o estudo do ponto. A fim de introduzir o assunto, apresentaram, na forma de *slide*, parte da história de René Descartes, precursor da Geometria Analítica. Depois, enunciaram alguns exemplos de aplicação desta área da Matemática.

Dando continuidade ao encontro, informações quanto à representação do ponto e a organização do plano cartesiano (eixos e quadrantes) foram passadas aos estudantes, que, logo na sequência, foram motivados a resolverem uma questão do Enem sobre o assunto. Passados alguns instantes, o exercício foi corrigido pelas docentes. Nesse momento, inclusive, os alunos manifestaram sua surpresa com a simplicidade da questão.

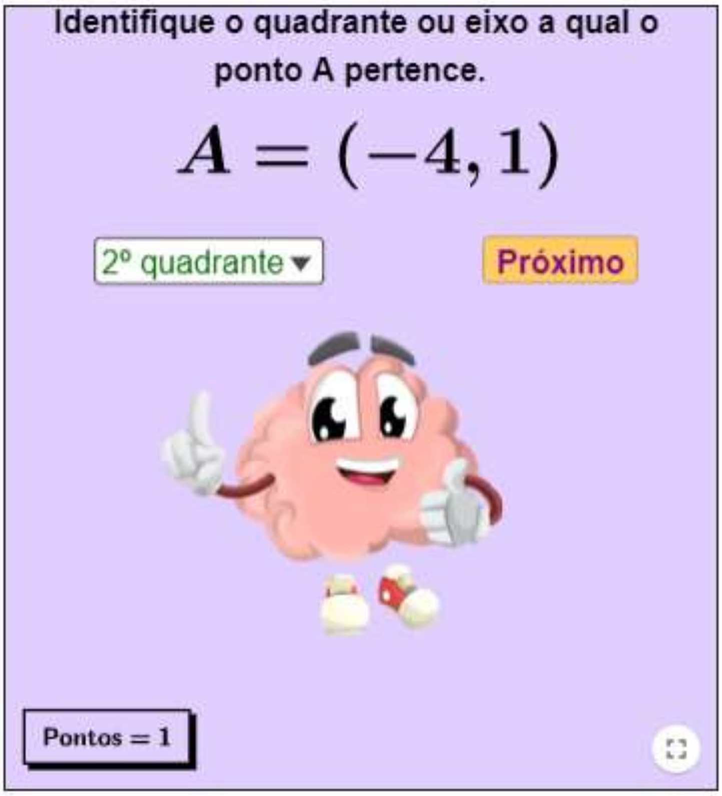
Figura 62-Exercício Enem



Fonte: INEP (2009).

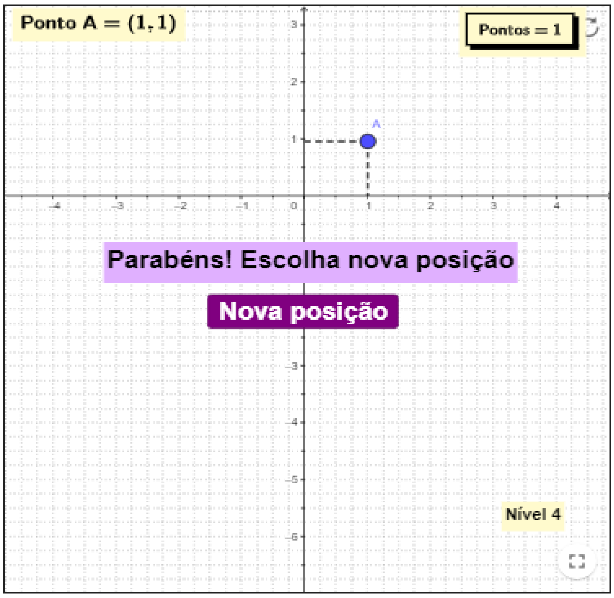
No intuito de dar seguimento aos exercícios sobre pontos e coordenadas, assim como propor uma nova prova para a competição entre os discentes, as acadêmicas lançaram mão de quatro diferentes *applets* disponíveis no *GeoGebra*. No primeiro, os estudantes deveriam, dado um ponto qualquer, descobrir à qual quadrante (ou eixo) este pertencia. No segundo, os alunos deveriam posicionar os pontos fornecidos no plano. O terceiro *applet* apresentava dois pontos (A e B) sobre uma reta, de modo que os estudantes deveriam informar as ordenadas e abscissas de A e B. Por fim, os alunos precisaram fornecer as coordenadas do ponto em que o Pokémon se encontrava, com o objetivo de conseguir capturá-lo.

Figura 63- Quadrantes



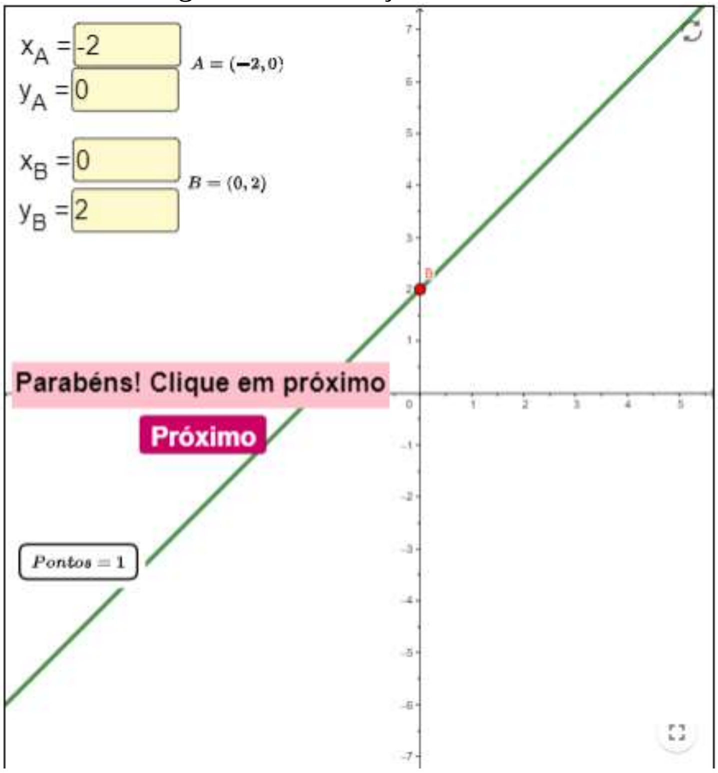
Fontes: Fernanda, Ducicleia Soares, Antonio Carlos Bastos Sousa (2021).

Figura 64- Pontos no plano



Fontes: Fernanda, Ducicleia Soares, Antonio Carlos Bastos Sousa (2021).

Figura 65- Interseção nos eixos



Fontes: Fernanda, Ducicleia Soares, Antonio Carlos Bastos Sousa (2021).

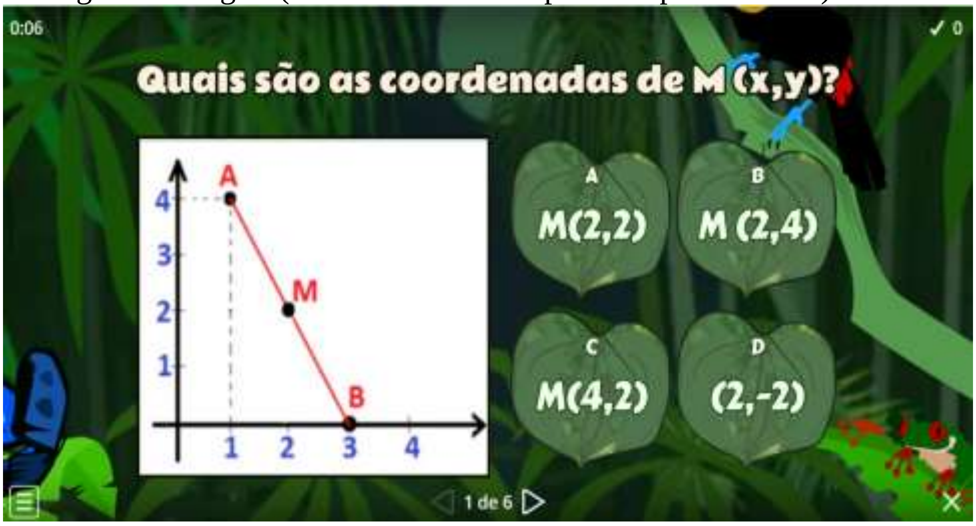
Figura 66- Capturando o *Pokémon*

Fonte: Azuaite Schneider (2021).

Embora a ideia fosse que todos os estudantes realizassem as tarefas em seus próprios computadores e/ou *smartphones*, devido às reclamações acerca da dificuldade no acesso, as docentes precisaram adaptar a atividade. Assim, passaram a compartilhar sua tela com os alunos, que, por sua vez, forneceram as respostas por meio do *chat* do *Jitsi* ou do grupo de suas respectivas equipes, no *WhatsApp*.

Sequencialmente, as estagiárias explanaram sobre a distância entre dois pontos e o ponto médio de um segmento. As explicações, realizadas por meio da exibição de *slides*, foram seguidas de exemplos, além da execução de um jogo previamente elaborado no site *WordWall*. Nesse último, após receberem o *link* que lhes concedia acesso ao *game*, os alunos responderam a questões de múltipla escolha, de modo a colocar seus conhecimentos em prática.

Figura 67- Jogo I (distância entre dois pontos e ponto médio)



Fonte: As autoras.

Para finalizar, as acadêmicas explicaram sobre a condição de alinhamento de três pontos, fornecendo, mais uma vez, um exemplo. Após, os estudantes foram direcionados a um novo jogo, o qual também trazia perguntas de múltipla escolha.

Figura 68- Jogo II (pontos colineares)

Fonte: As autoras.

Devido ao tempo, as estagiárias não puderam propor, aos estudantes, os exercícios que haviam preparado acerca dos conteúdos de distância entre dois pontos, ponto médio e pontos colineares. Por este motivo, tais exercícios foram convertidos em um desafio, no intuito de que, além de fomentar a competição entre os alunos, estes também pudessem continuar estudando sobre os conceitos pensados para o quarto encontro. Conforme acordado, o desafio foi enviado pelo *WhatsApp* e todas as equipes tiveram até a sexta-feira que antecedeu o quinto encontro para enviar suas resoluções.

No mais, todos foram convidados a acessarem um mural colaborativo preparado na plataforma *Nearpod*, a fim de contarem o que acharam da aula. Embora as estagiárias não tenham tido muitas respostas, especialmente por terem ultrapassado, em alguns minutos, o horário final do encontro, todos foram unanimes em dizer que gostaram do encaminhamento metodológico, sobretudo da interação promovida pelos jogos e desafios.

Neste sentido, conclui-se que a aposta em manter o cunho competitivo de, ao menos, algumas das atividades propostas foi muito certeira. Além de contribuir para com o engajamento da turma, a estratégia favoreceu o seu aprendizado, uma vez que exige, dos estudantes, maior atenção e organização.

5.2 ENCONTRO V

5.2.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 5º ENCONTRO

(03/07/2021)

Público-Alvo:

Educandos inscritos no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT).

Tempo de execução:

2 horas e 30 minutos.

Conteúdo:

Equação geral e reduzida da reta, posições relativas entre duas retas no plano

Objetivo Geral:

Espera-se que, por meio das aulas ministradas, os alunos mostrem-se capazes de:

- Representar, geometricamente, uma reta por meio de suas equações geral e reduzida;
- Identificar as posições relativas entre duas retas no plano.

Objetivos Específicos:

Mediante a execução de aulas pautadas na resolução de problemas, bem como na participação ativa dos discentes, objetiva-se que os educandos se apresentem aptos a:

- Determinar os coeficientes angular e linear de uma reta;
- Definir a equação de uma reta (geral e reduzida) a partir de dois pontos conhecidos, assim como por meio de um ponto e seu coeficiente angular;
- Verificar se um ponto é ou não pertencente à reta dada;
- Identificar as posições relativas entre duas retas no plano e a relação entre suas equações.

Recursos Didáticos:

No decorrer das aulas, serão utilizados tais materiais:

Computador com acesso à internet, lâminas contendo exemplos de retas e suas equações geral e reduzida, material do aluno

Encaminhamento metodológico:

Com a finalidade de atingir os objetivos supracitados, serão desenvolvidas as seguintes atividades:

10. (20 minutos) Correção dos desafios passados no final da aula anterior por meio de *slides* e com o auxílio do quadro, a fim de introduzir o conteúdo de retas.

Quadro 43 – Resolução dos desafios

RESOLUÇÃOS DOS DESAFIOS

1. (PUC-RJ - Adaptada) Os pontos (0, 8), (3, 1) e (1, y) do plano são colineares. Sendo assim, qual é o valor de y?

Resolução:

Os pontos (0,8), (3,1) e (1, y) são colineares, então eles pertencem a **mesma reta.** A E**quação reduzida da reta** é da forma y = ax + b. Vamos achar a equação da reta que passa pelos pontos **(0,8) e (3,1).**

$$\begin{cases} \boldsymbol{b = 8} \\ \boldsymbol{3a + b = 1} \end{cases}$$

$\boldsymbol{3a + 8 = 1 \rightarrow 3a = 1 - 7 \rightarrow a = -\frac{7}{3}}$

A E**quação da reta** é $y = -\frac{7x}{3} + 8$.

Substituindo x por 1.

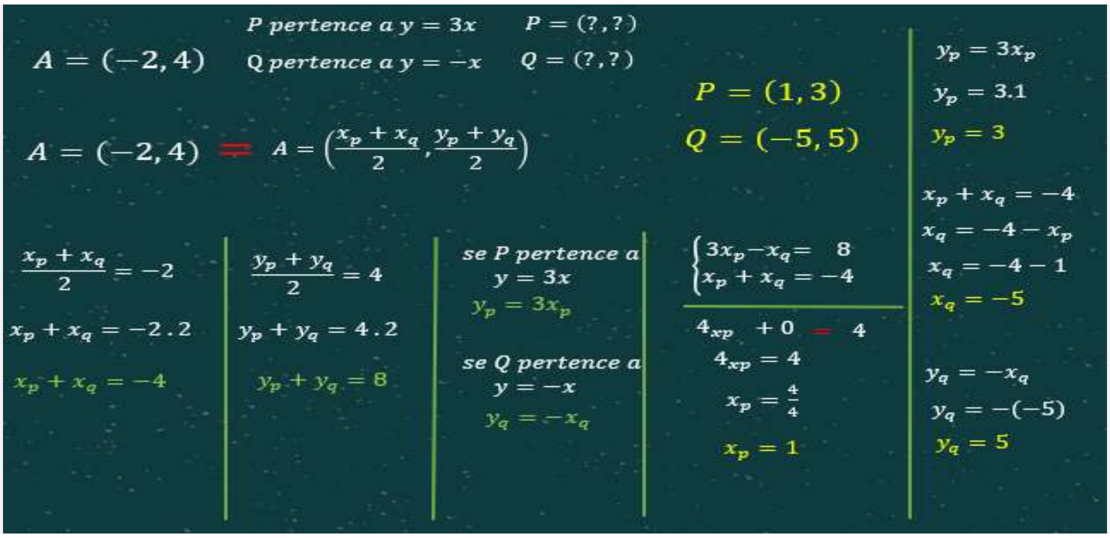
$$y = -\frac{7x}{3} + 8 \rightarrow y = -\frac{7 \cdot 1}{3} + 8 \rightarrow y = \frac{17}{3}$$

Logo o terceiro ponto $(1, \frac{17}{3})$

2. (Unioeste 2012) Dado o ponto A(–2, 4), determine as coordenadas de dois pontos P e Q, situados, respectivamente, sobre as retas y = 3x e y = – x, de tal modo que A seja o ponto médio do segmento PQ.

Resolução:

Figura 69- Resolução exercícios



Fonte: Acervo das autoras.

11. (20 minutos) Iniciaremos a aula passando as definições e conceitos de retas com o auxílio de *slides*.

12. (10 minutos) Disponibilização de um exercício referente ao conteúdo abordado nos *slides* anteriores para que façam inicialmente sozinhos e logo após a correção.

Quadro 44- Conceitos a serem abordados

CONCEITOS A SEREM ABORDADOS

Reta

Não podemos definir uma reta, no entanto, temos uma noção do que seja. Por exemplo, um risco no papel, feito com auxílio de uma régua.

Uma reta é um conjunto de infinitos pontos. Logo, possui comprimento infinito.

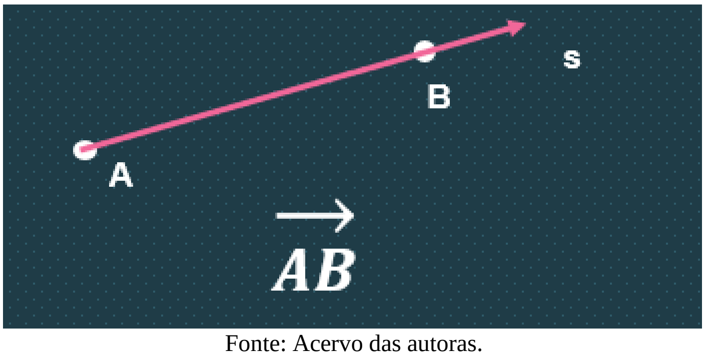
Numa reta existem infinitos pontos sobre ela e fora dela

Nomeamos uma reta por uma letra minúscula do alfabeto latino.

Semirreta

É uma reta que tem início (marcado por um ponto), mas não tem fim. Ou seja, é uma linha que apresenta somente uma direção e sentido, partindo de um ponto de origem.

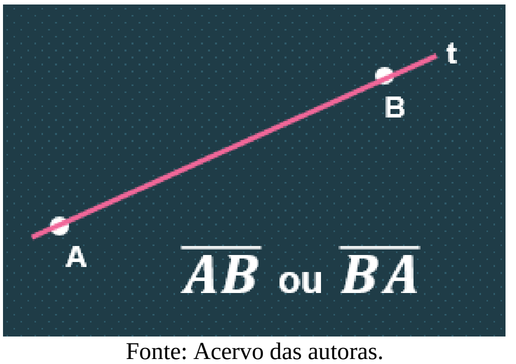
Figura 70 - Reta



Fonte: Acervo das autoras.

Segmento de reta

O segmento de reta é definido como uma parte da reta, o qual está delimitada por dois pontos.

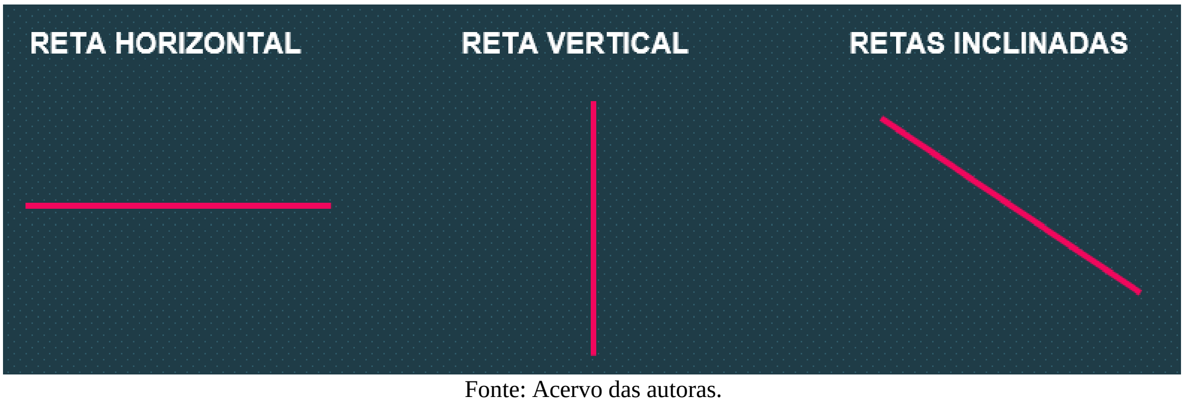


Fonte: Acervo das autoras.

Posições absolutas da reta

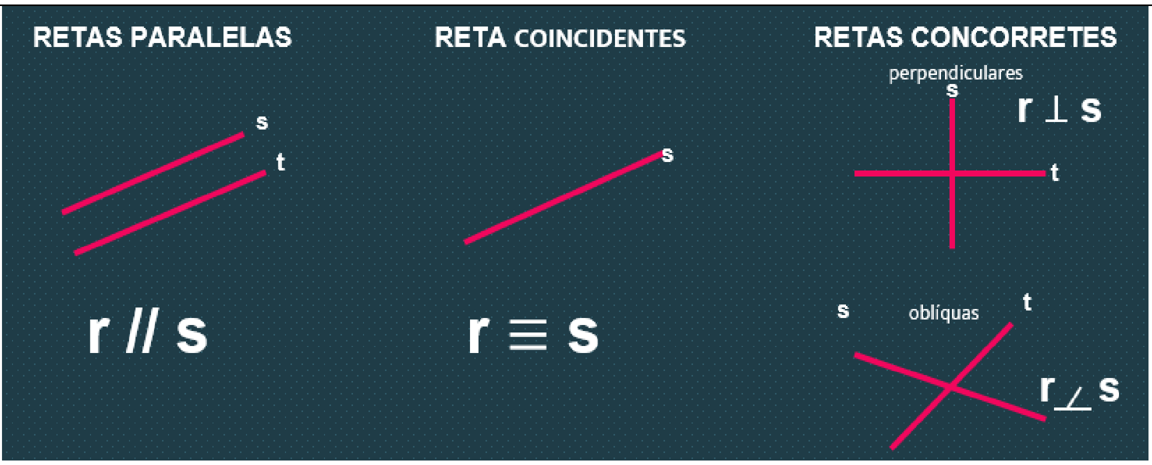
São as posições que a reta ocupa no espaço ou no plano. As retas podem ocupar três posições:

Figura 71 - Posições da reta



Fonte: Acervo das autoras.

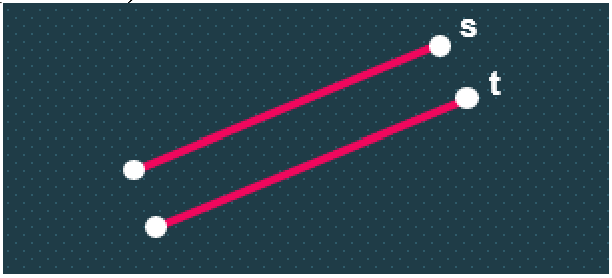
Posições relativas entre duas retas



Fonte: Acervo das autoras.

Retas paralelas

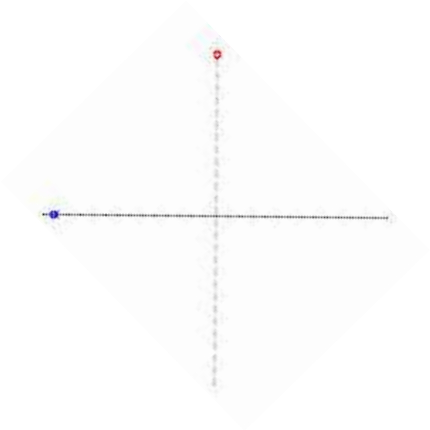
Retas PARALELAS são retas coplanares que não possuem nenhum ponto em comum e todos os seus pontos estão a uma distância constante.
Utilizamos (//) como símbolo para indicar Paralelismo.
Representação: r//s (r é paralela a s).



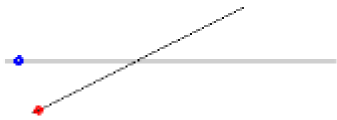
Fonte: Acervo das autoras.

Figura 72 - Partitura

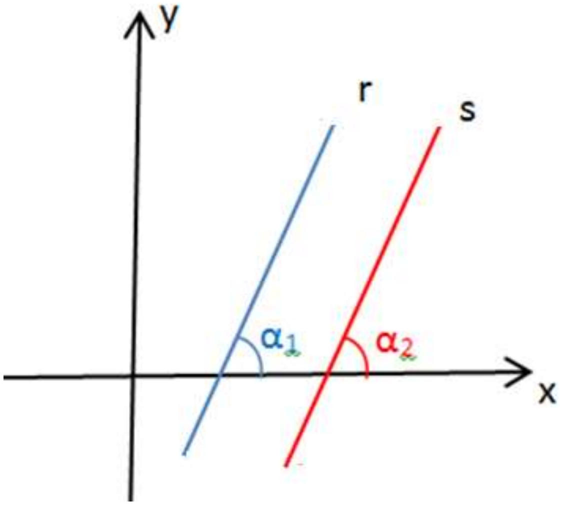
Duas retas são concorrentes se, e somente se, possuírem um ponto em comum:
Retas concorrentes perpendiculares formam quatro ângulos de 90º
Utilizamos o símbolo ⊥ para indicar a perpendicularidade.
Notação: r ⊥ s Lê-se: reta r perpendicular à reta s.



Retas concorrentes oblíquas, formam dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos.
Utilizamos o símbolo ∠ para indicar a condição de oblíqua.
Notação: r ∠ s Lê-se: reta r oblíqua à reta s

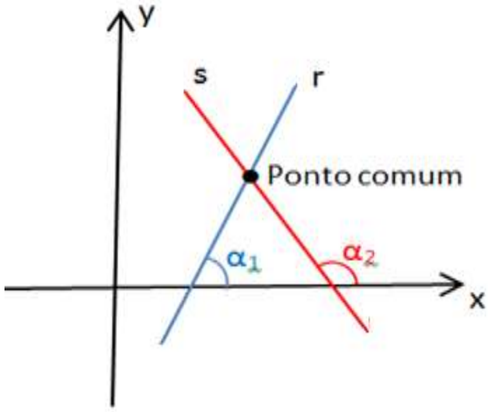


Retas COINCIDENTES são retas coplanares que possuem todos seus pontos em comum.
Imagine que você está andando em linha reta e que este mesmo caminho será percorrido por outra pessoa. Pode-se dizer que os pontos que pertenceram ao seu caminho (reta) pertencerão também ao do segundo indivíduo.
Vamos chamar a linha que você percorreu de reta t e de reta n o caminho da outra pessoa. Percebemos, então, que todos os pontos pertencentes à reta n, são comuns também à reta t, pois os dois passaram pelos mesmos pontos. Com isso classificamos as retas n e t de retas coincidentes.
Utilizamos (≡) como símbolo para indicarmos coincidência.
Notação: r ≡ s Lê-se: reta r é coincidente com a reta s.
Inclinação da reta
Duas retas são paralelas quando possuem o mesmo coeficiente angular.
Se $\alpha_1 = \alpha_2$
Tan α_1= Tan α_2
Logo, $m_r = m_s$
Seja: r : 2x+3 s: 2x+1
Elas possuem os mesmos coeficientes angulares, pois $m_r = m_s$ = 2
Logo: r é paralela a s (r⫽s)
Analisando o coeficiente Linear temos que elas são paralelas distintas
pois, 3 ≠ 1. Se fossem iguais as retas seriam paralelas coincidentes



Fonte: Acervo das autoras.

A posição de uma reta, depende de sua inclinação que é determinada pela seu seu coeficiente angular.
Duas retas são perpendiculares entre si, se:
$\boldsymbol{\alpha_2 = \alpha_1}$ ***90º**
Logo, $\boldsymbol{m_r * m_s = -1 \rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}}$
Exemplo:
r: 2x-3 s: $\boldsymbol{-\frac{1}{2}x + 7}$



Fonte: Acervo das autoras.

Fonte: Acervo das autoras.

Quadro 45- Exercício e resolução do exercício

EXERCICIO I

Qual é a posição da reta r, de equação 15x + 10y - 3 = 0, em relação à reta s, de equação 9x + 6y - 1 = 0?

Reta R:

$$15x + 10y - 3 = 0, vamos\ isolar\ y.$$
$$10y = 0 + 3 - 15x = 3 - 15x$$
$$10y = 3 - 15x$$
$$y = \frac{3}{10} - \frac{15x}{10}$$
$$y = \frac{3}{10} - \frac{3x}{2}$$

Reta S.

$$9x + 6y - 1 = 0, isolando\ y:$$
$$6y = 1 - 9x$$
$$y = \frac{1}{6} - \frac{9x}{6}$$
$$y = \frac{1}{6} - \frac{3x}{2}$$

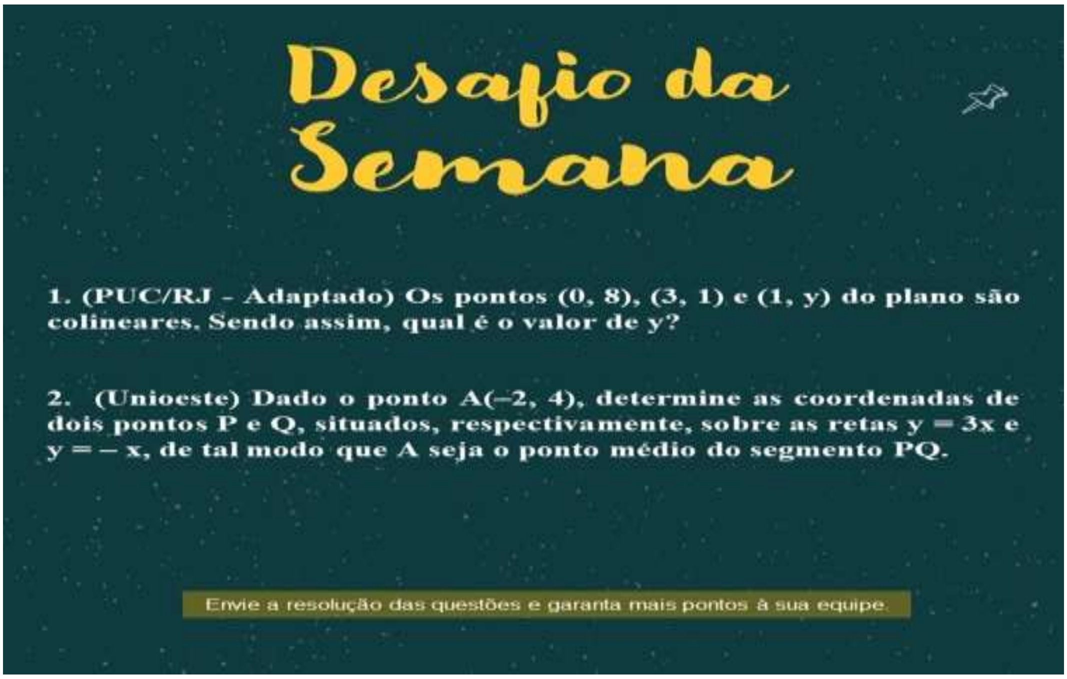
R e S possuem mesma inclinação ou mesmo ângulo em relação ao eixo dos x e, portanto, são paralelas.

Fonte: Kevin Mariano (2015).

3. (15 minutos) – Atribuiremos aos discentes o *link* para a plataforma *Nearpod*, onde eles resolveram um desafio que consiste no conteúdo abordado durante a aula. Para a resolução da atividade proposta eles utilizaram os grupos formados no aplicativo *WhatsApp.* Ao final, divulgaremos quem ganhou o desafio.

Quadro 46 - Desafio

Desafio I



Fonte: PUC RJ (2000); Unioeste (2015).

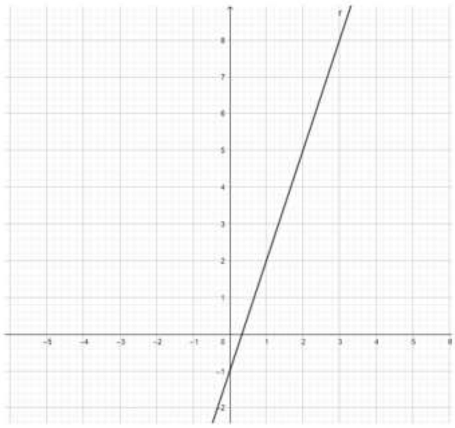
4. (15 minutos) – Dando continuidade a aula, voltaremos a apresentar através dos *slides* as definições sobre Equação geral da reta e coeficiente angular e linear.

4.1. (10 minutos) – Após o conteúdo apresentado, disponibilizaremos um exercício e a resolução a seguir.

Quadro 47 - Conceitos a serem abordados

CONCEITOS A SEREM ABORDADOS

EQUAÇÃO GERAL DA RETA



3x - y - 1 = 0

↓

ax+ by + c = 0

Equação da Reta

Dois pontos definem uma reta. Desta forma, podemos encontrar a equação geral da reta fazendo o alinhamento de dois pontos com um ponto (x,y) genérico da reta.
Sejam os pontos $A(x_a,y_a)$ e $B(x_b,y_b)$, não coincidentes e pertencentes ao plano cartesiano.
Três pontos estão alinhados quando o determinante da matriz associada a esses pontos é igual a zero. Assim devemos calcular o determinante da seguinte matriz:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante encontramos a seguinte equação:

$$(ya - yb)\,x + (xb - xa)\,y + xayb - xbya = 0$$

Vamos chamar:

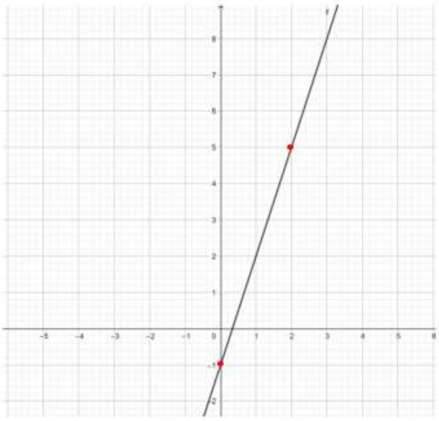
$$a = (ya - yb)$$
$$b = (xb - xa)$$
$$c = xayb - xbya$$

A equação geral da reta é definida como:

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$$

Onde **a**, **b** e **c** são constantes e **a** e **b** não podem ser simultaneamente nulos.

EQUAÇÃO GERAL DA RETA



Sejam os pontos A(0, -1) e B(2,5).

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ x & y & 1 & x & y \end{vmatrix} = 0$$

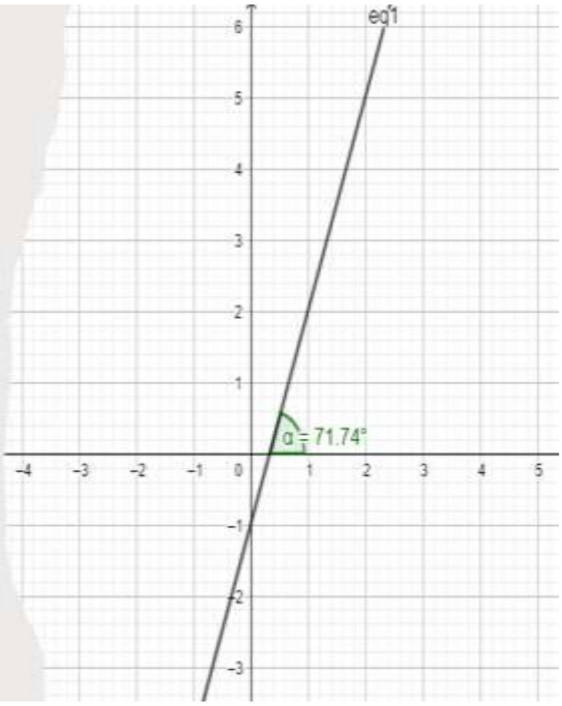
$-5x \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad -x \quad 2y$

$-5x + 2 - x + 2y = 0$

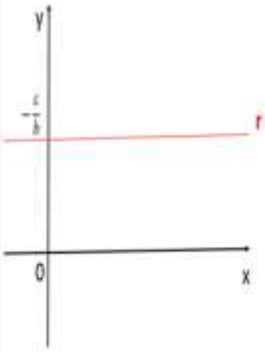
$-6x + 2y + 2 = 0 \qquad \div(-2)$

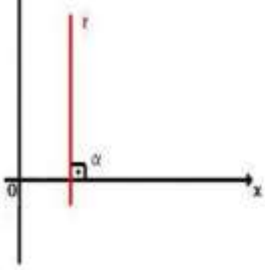
$\boxed{3x - y - 1 = 0}$

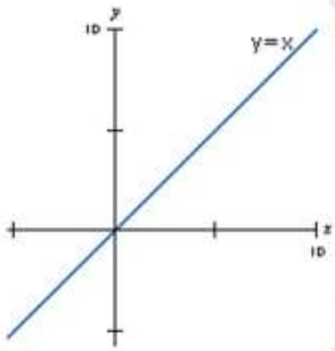
Qual é a tangente do ângulo encontrado?

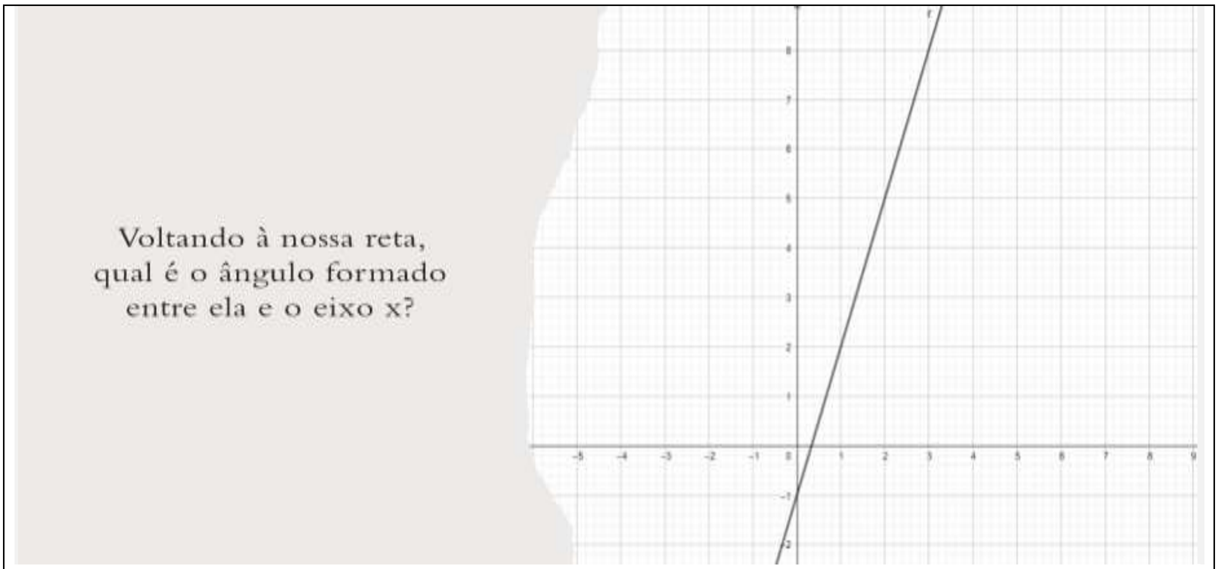


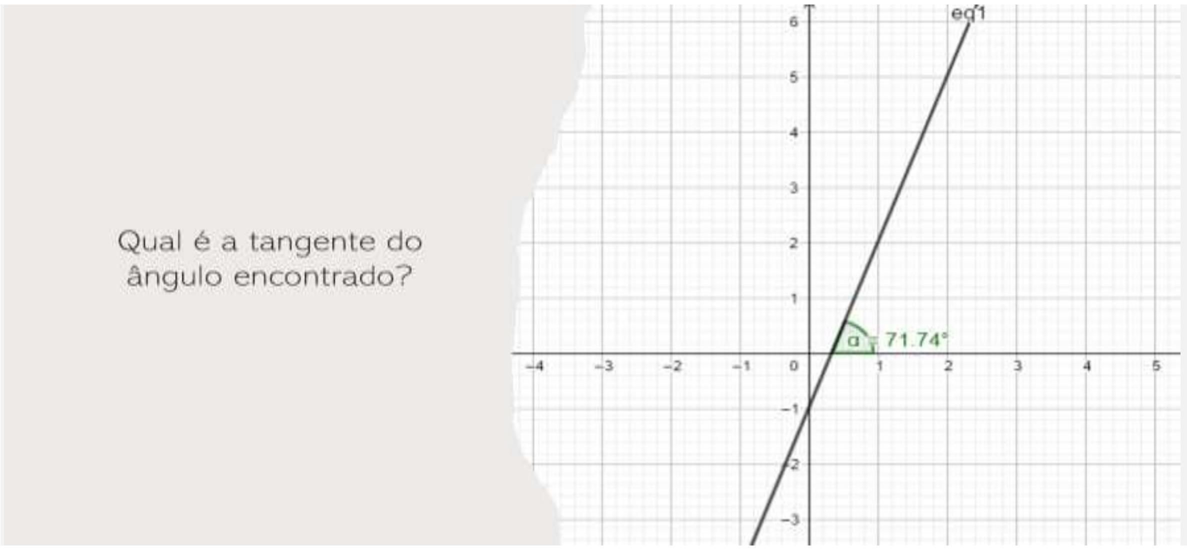
CASOS PARTICULARES









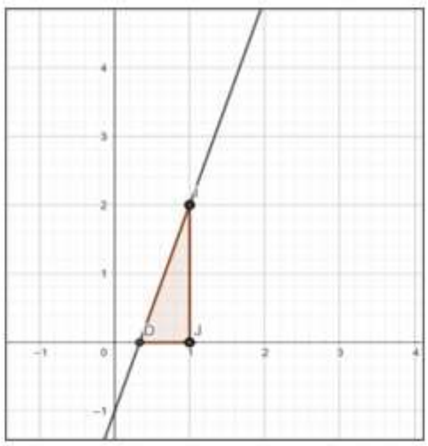


Coeficiente Angular e Linear

Como vimos, o coeficiente angular corresponde à tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo x. Contudo, também é possível determinar o coeficiente angular conhecendo-se dois pontos da reta, pois:

$$m = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$m = \frac{y1 - y}{x1 - x}$$



Exemplo:

1. Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos A(-1,2) e B(-2,5). Em seguida, verifique se o ponto C (3,0) pertence a esta mesma reta.

Resolução:

$$m = \frac{(y2 - y1)}{(x2 - x1)}$$

$$m = \frac{(5 - 2)}{((-2) - (-1))}$$

$$m = \frac{3}{-1}$$

$$m = -3$$

$$(y - y1) = -3(x - x1)$$

$$(y - 2) = -3(x - (-1)$$

$$(y - 2) = -3x + 3$$

$$y = -3x + 3 + 2$$

$$y = -3x + 5$$

Fonte: ITSMOST (2021).

5 – (10 minutos) Aplicação de um exercício para complementar a explicação e colocar em prática o conteúdo trabalhado.

Quadro 48 - Exercício II

EXERCICIO II

1- (UFSCar – SP) No plano cartesiano sejam r uma reta de equação $ax + 2y - 2 = 0$. Sabendo-se que P(1,-1) é um ponto de r, determine:

a) O valor de a

$$Sendo\ P(x, y) = P(1, -1):$$

$$ax + 2y - 2 = 0$$

$$a.1 + 2.(-1) - 2 = 0$$

$$a = 4$$

b) o valor do coeficiente angular de r

$$y = mx + n\ (equação\ reduzida\ de\ uma\ reta)$$

$$ax + 2y - 2 = 0$$

$$4x + 2y - 2 = 0$$

$$2x + y - 1 = 0$$

$$y = -2x + 1$$

$$m = -2$$

Fonte: UFSCAR- SP (2001).

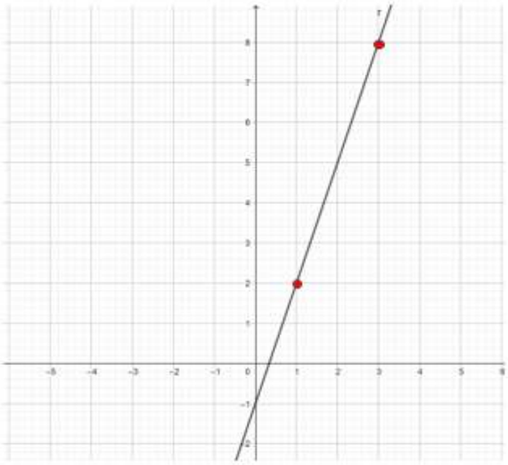
6. (15 minutos) Apresentaremos através dos *slides* as definições de Equação reduzida da reta, assim finalizando o conteúdo.

6.1 – (10 minutos) – Será apresentado um exercício referente ao conteúdo abordado e logo após a resolução.

Quadro 49- Conceitos a serem abordados

CONCEITOS A SEREM ABORDADOS

EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA



Sabemos que os pontos A (1,2) e B (3,8) pertencem à reta dada. Assim sendo, podemos calcular m, fazendo;

$$m = \frac{8-2}{3-1} = 3.$$

Logo,

$$y = mx + n \rightarrow y = 3x - n.$$

Fazendo uso de um dos pontos (neste caso o ponto A), obtém-se:

$$2 = 3.1 - n \rightarrow n = -1.$$

Realizando a substituição, concluímos que a equação reduzida da reta é y = 3x – 1.

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

Outra maneira de encontrar a equação geral de uma reta é utilizando o seu coeficiente angular (m), dado pelo ângulo formado entre a reta e o eixo x. Assim,

$$\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}\ .$$

Exemplo:

1. Sabendo que a reta r passa pelo ponto A (1,5) e tem o coeficiente angular -2, determine qual a equação da reta?

Resolução:

$Sendo\ A(1,5)\ e\ m = -2, temos$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = -2(x - 1)$

$y - 5 = -2x + 2$

$$y = -2x + 7$$

Fonte: ITSMOST (2021).

7-(10 minutos) Aplicação de um exercício através dos *slides*. Será disponibilizado 5 minutos para os alunos resolverem, e depois será corrigido para sanar as dúvidas.

Quadro 50 - Exercício III

EXERCICIO III

1- (Unioeste 2018) Duas retas $y = ax$ e $y = bx + c$, com a, b e c constantes reais, encontram-se no ponto (3,2). Sabe se ainda que $b = -3a$. Assim, é correto afirmar que as equações das retas são:

Resposta:

Se o ponto pertence as duas retas então:

$$y = ax$$
$$2 = 3a$$
$$a = \frac{2}{3}$$

Podemos utilizar a relação fornecida e determinar o valor de b.

$$b = -3a$$
$$b = -3 \cdot \frac{2}{3}$$
$$b = -2$$

Vamos substituir o ponto (3,2) na segunda equação, junto com o valor da constante b.

$$y = bx + c$$
$$2 = -2 \cdot 3 + c$$
$$c = 8$$

Os valores correspondentes são $a = \frac{2}{3}, b = -2, c = 8$

Fonte: Unioeste (2018).

8- (20 minutos) – Vamos propor para os alunos uma última atividade na plataforma *Nearpod* como desafio. Novamente como na atividade anterior, eles utilizarão seus grupos do *WhatsApp* para a resolução das questões.

Quadro 51 – Perguntas do desafio II.

PERGUNTAS DO DESAFIO II

Determine:

1- Equação geral da reta que passa pelos pontos A(4,3) e B(-1,2).
2- Equação reduzida de uma reta com coeficiente linear igual a 6.
4- Equações reduzidas de duas retas paralelas entre si.
5- Equações reduzidas de duas retas perpendiculares entre si.
6- Equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(2,5) e B(4,1).
7- Equação fundamental da reta que passa pelos pontos A(0,1) e B(3,5).
8- Equação geral da reta que passa pelos pontos A(-2,3) e B(2,1).
9- Equações gerais de duas retas paralelas entre si.
10- Equação fundamental da reta que passa pelo ponto A(-3,1) e tem coeficiente angular igual a 2.
11- Equação reduzida de uma reta com coeficiente angular igual a 5.

Fonte: As autoras.

9- (10 minutos) – Ao final da aula passaremos a lista de exercícios para que resolvam durante a semana.

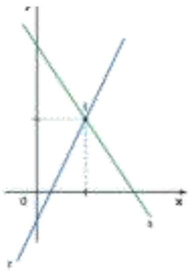
Quadro 52 – Lista de Exercícios

LISTA DE EXERCÍCIOS

1- Hugo coletou dados sobre o censo populacional brasileiro de 1940 até 2010 e encontrou uma reta que descreve bem como a expectativa de vida do brasileiro, ao nascer, tem crescido com o tempo. A reta que ele encontrou tem equação $y = \frac{475}{1000}x - 880,$ onde *x* é o ano, $1940 \leq x \leq 2010$, e *y* é a expectativa de vida ao nascer (em anos). Segundo este modelo descrito pelo Hugo, em que ano o Brasil atingiu a expectativa de vida de 70 anos?

a) 2000
b) 1990
c) 2010
d) 2000
e) 1995

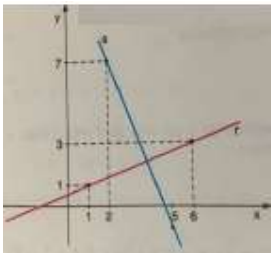
2- Determine o ponto I de intersecção das retas r: 2x-y-1=0 e s: 4x+3y-17=0 representadas abaixo.



3- A equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(0,1) e B(6,8) é dada por:

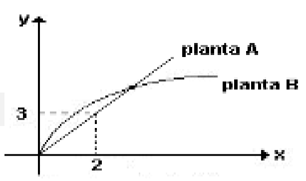
a) y = 7x + 1
b) y = 6x + 1
c) y = 7/6x + 1
d) y = 6/7 x + 1

4- Ache os coeficientes angulares das retas *r* e *s* da figura e verifique se elas são perpendiculares.



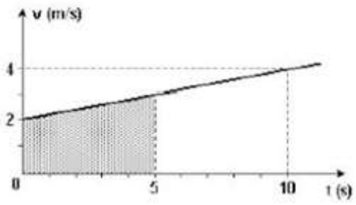
5- Determine a equação da reta que passa pelo ponto P (2,3) e pelo ponto Q, simétrico de P em relação à origem.

6- Duas plantas de mesma espécie A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tradas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pela lei da matemática $y = \frac{24x - x^2}{12}$. Um esboço desses gráficos está apresentado na figura.



Determine:
a) A equação da reta
b) O dia em que a planta A e B atingiram a mesma altura.

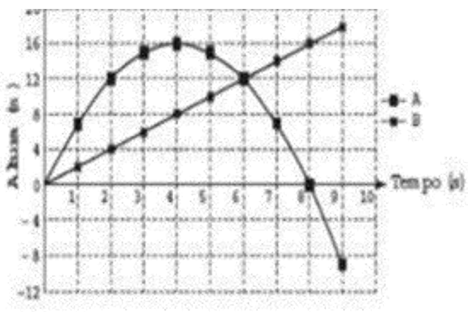
7- Um atleta está treinando em uma pista retilínea e o gráfico abaixo apresenta dados sobre o seu movimento.



A distância percorrida pelo corredor, no intervalo entre 0 e 5 segundos, é igual a área do trapézio sombreado. Calcule a distância.

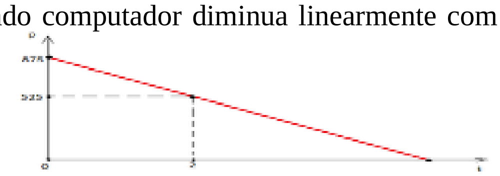
8- Dada a reta r da equação $4x+2y+5=0$ e o ponto P = (2, -1), determine:
a) O coeficiente angular de *r*.
b) A equação da reta *s* que é perpendicular a r e passa pelo ponto o P.

9- Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo do projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá:
a) diminuir em 2 unidades.
b) diminuir em 4 unidades.
c) aumentar em 2 unidades.
d) aumentar em 4 unidades.
e) aumentar em 8 unidades

10- Suponha que o preço de p (em dólares) de um determinado computador diminua linearmente com o passar do tempo t (em anos), de acordo com o seguinte gráfico.



Desse modo, é correto afirmar que o número de anos necessários para que esse computador não tenha valor algum é:

a) 5 b) 6 c) 4 d) 7

b)

11- Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

I. A reta cuja equação é y-3=0 é paralela ao eixo das abscissas.

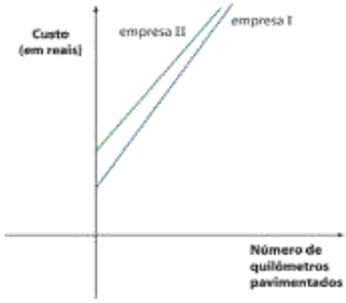
II. A reta cuja equação é 2x+3=0 é paralela ao eixo das ordenadas.

III. A reta da equação x-y-1=0 passa pelo ponto (0, 1).

IV. Duas retas paralelas têm o mesmo coeficiente linear.

V. Duas retas em um plano que não são paralelas são perpendiculares.

12- Em uma licitação para a pavimentação de uma estrada, duas empresas ofereceram condições similares (embora com valores diferentes). Cada uma delas cobrava um valor fixo e um adicional por quilômetro de estrada pavimentada. A relação entre o custo da obra e o número de quilômetros a serem pavimentados pode ser esboçada como no gráfico a seguir.



As retas suportem das semirretas mostradas têm por equações gerais:

5000x-y+400000=0

6000x-y+240000=0

a) Associe cada reta à empresa correspondente.

b) Qual é o valor fixo cobrado por cada uma das empresas?

c) Qual é o valor cobrado por quilômetro pavimentado por cada empresa?

d) Qual é o custo total da pavimentação de 100 km em cada uma das empresas?

e) Para quantos quilômetros de pavimentação é indiferente contratar qualquer uma das empresas?

Fontes: Adilson Longen (2016); Descomplica (2020); Estuda.com (2020); Gelson Iezzi (2016).

Avaliação:

A avaliação se desenvolverá no decorrer das aulas, considerando-se o desempenho dos alunos nos encaminhamentos propostos.

Referências:

EXERCÍCIOS DO ENEM. Disponível em: https://descomplica.com.br/. Acesso em 06 ago. 2020.

EXERCÍCIOS SOBRE EQUAÇÃO DA RETA. Disponível em: https://sabermatematica.com.br/exercicios-resolvidos-equacao-reduzida-da-reta.html. Acesso em 06 ago. 2020.

GEOGEBRA. Disponível em: https://www.geogebra.org/geometry. Acesso em 01 ago. 2020.

GOUVEIA, Rosimar. **Equação da Reta.** Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/equacao-da-reta/. Acesso em 01 ago. 2020.

IEZZI, Gelson. **Matemática**: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LONGEN, Adilson. **Matemática**: padrões e relações. São Paulo: Editora do Brasil, 2016.

MIRANDA, Danielle de. **Posições relativas de duas retas**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/posicoes-relativas-duas-retas.htm. Acesso em 01 ago. 2020.

OLIVEIRA, Naysa Crystine Nogueira. **Equação geral da reta**. Infoescola. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/equacao-geral-da-reta/. Acesso em 01 ago. 2020.

PROVAS ENEM. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 01 ago. 2020.

QUESTÕES SOBRE EQUAÇÃO DA RETA. Disponível em: https://enem.estuda.com/questoes/?cat=3&subcat=2652. Acesso em 05 ago. 2020.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Retas**. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/retas.htm. Acesso em 01 ago. 2020.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Equação geral da reta no plano**. Alunos Online. Disponível em: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/equacao-geral-da-reta.html#:~:text=Equa%C3%A7%C3%A3o%20Geral%20da%20Reta%20no%20Plano,-CURTIDAS%2048&text=As%20equa%C3%A7%C3%B5es%20na%20forma%20ax,de%20equa%C3%A7%C3%A3o%20geral%20da%20reta. Acesso em 01 ago. 2020.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Equação Geral da Reta**. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/equacao-geral-reta.htm. Acesso em 01 ago. 2020.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Posições relativas.** Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/posicoes-relativas-1.htm. Acesso em 01 ago. 2020.

5.2.2 Relato V

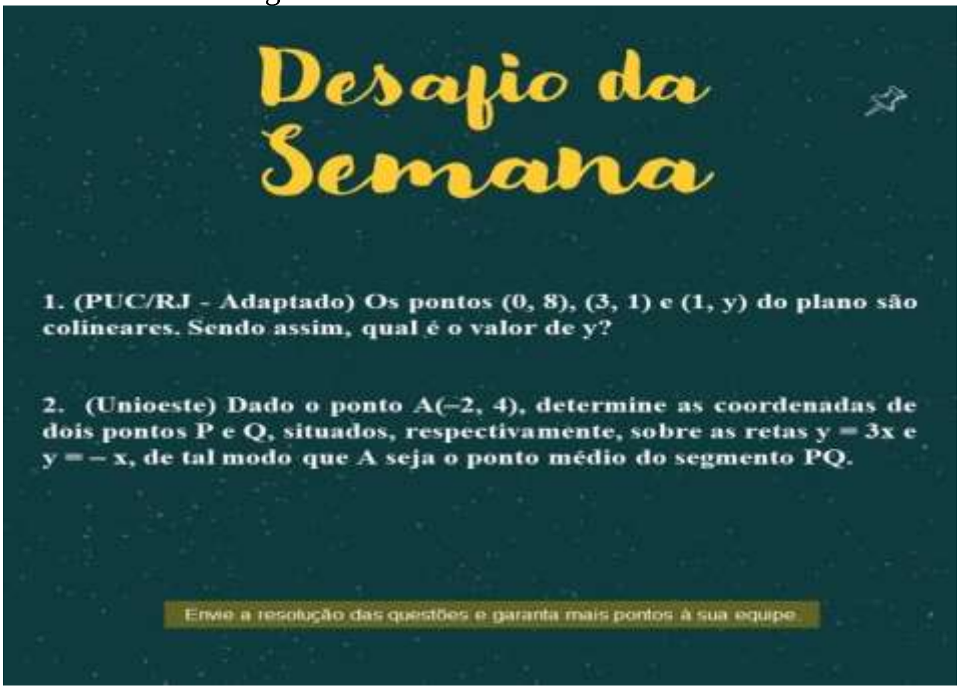
Relatório Promat – Quinto Encontro

Aos três de julho do corrente ano, as estagiárias Fernanda Carla de Oliveira, Karla Katrine Pereira Cazarotto e Nadya Beatriz Antunes Barroso, da quarta série do curso de Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel, desempenharam, sob a orientação da professora Pamela Gonçalves, mais uma prática no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (Promat), que neste ano, ocorre virtualmente, por meio da plataforma *Jitsi*.

Conforme acordado, no quarto encontro, os alunos receberam, através do *WhatsApp*, uma espécie de *folder* com o que foi chamado de *Desafio da Semana*. A ideia era que, em suas respectivas equipes, os estudantes buscassem resolver as questões propostas, as quais tratavam do conteúdo abordado no referido encontro.

Assim sendo, as estagiárias conferiram, inicialmente, se as equipes haviam cumprido o desafio (de fato, vários alunos encaminharam suas resoluções), atribuíram os pontos, e realizaram a correção dos exercícios com a turma.

Figura 73- Desafio da Semana



Fonte: As autoras.

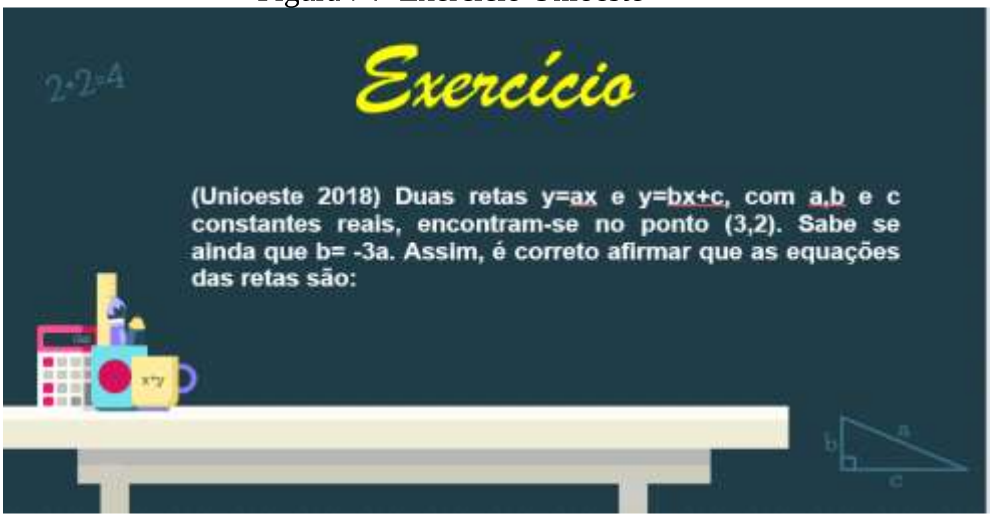
Em seguida, partindo do uso de *slides*, as acadêmicas passaram a tratar sobre o estudo da reta. A princípio, trabalharam com a noção de reta, além da apresentação da representação geométrica, forma de nomeação (letras minúsculas do alfabeto latino) e das definições de semirreta e segmento de reta. Após, comentaram acerca das posições absolutas que uma reta pode ocupar no espaço, bem como das posições relativas entre duas retas – tudo isso com o auxílio de animações e imagens.

Para dar continuidade, abordaram sobre a inclinação da reta, mostrando, especialmente, a relação entre os coeficientes angulares de duas retas paralelas e duas retas perpendiculares entre si. Por fim, algumas imagens ilustrando a presença das retas no cotidiano foram exibidas e, de modo a motivar os alunos a colocarem em práticas os conhecimentos adquiridos, um exercício foi proposto. Sua correção, no entanto, se deu após os minutos destinados à resolução, por parte dos discentes.

Transpondo, devido ao tempo, o desafio preparado como forma de fixar os conceitos até então abordados, as estagiárias mostraram, aos alunos, como obter a equação geral da reta aplicando o determinante. Além disso, com o uso do *software GeoGebra*, voltaram a tratar do coeficiente angular, enfatizando que este se refere à tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas. Em suma, dada uma reta, os alunos foram motivados a calcular, com base em seus conhecimentos sobre a trigonometria no triângulo retângulo, a tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo x. Ademais, o coeficiente linear também foi apresentado.

Sequencialmente, os estudantes aprenderam como determinar as equações reduzida e fundamental da reta. Para isso, foram fornecidos alguns exemplos e, mais tarde, um exercício advindo de um dos vestibulares da Unioeste foi aplicado.

Figura 74- Exercício Unioeste



Fonte: Unioeste (2018).

A correção desse exercício foi dada por meio do uso de *slides*. Por exigir a realização de vários passos, esta despertou a atenção dos estudantes, que julgaram ser uma questão que exige muito tempo para a resolução.

Faltando cerca de dez minutos para o término do encontro, as estagiárias propuseram um desafio aos estudantes, no qual cada equipe precisou escolher uma, dentre dez cartas. As cartas que, continham exercícios relacionados à obtenção das equações da reta, foram montadas no site *WordWall*. Assim, na medida em que os alunos realizavam suas escolhas, era possível abrir, de maneira dinâmica, a carta correspondente.

Foram cedidos alguns minutos até que todas os grupos respondessem suas respectivas questões. Na sequência, as acadêmicas realizaram a correção, atribuindo-lhes mais alguns pontos na competição. Além disso, um fato interessante, que merece ser comentado, é que uma aluna lançou mão do *GeoGebra* para encontrar sua equação, mostrando sua familiaridade com o recurso.

Figura 75- Desafio final

Fonte: As autoras.

Por fim, os estudantes foram comunicados de que, durante a semana subsequente, receberiam, pelo *WhatsApp*, um novo desafio.

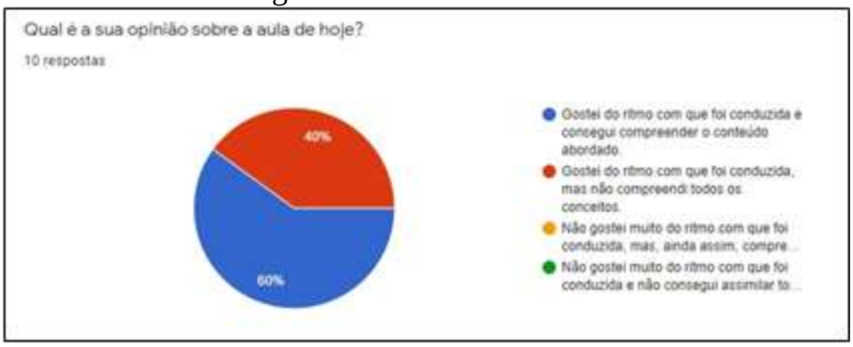
Todavia, as acadêmicas anexaram à lista de frequência um questionário acerca da percepção dos alunos sobre o encontro. Nele, os discentes disseram ter gostado da dinâmica da aula, porém um percentual considerável afirmou não ter conseguido assimilar todos os conceitos. As opções de resposta estão, em detalhes, no quadro abaixo.

Quadro 53 - *Feedback*

Qual é a sua opinião sobre a aula de hoje?
Gostei do ritmo com que foi conduzida e consegui compreender o conteúdo abordado.
Gostei do ritmo com que foi conduzida, mas não compreendi todos os conceitos.
Não gostei muito do ritmo com que foi conduzida, mas, ainda assim, compreendi o conteúdo abordado.
Não gostei muito do ritmo com que foi conduzida e não consegui assimilar todos os conceitos.

Fonte: As autoras.

Figura 76- *Feedback*



Fonte: As autoras.

Diante de tais manifestações, as estagiárias puseram-se a pensar nos fatores que possam ter contribuído para com o não entendimento de alguns conceitos. Imagina-se que a escassez do tempo, que acabou por acelerar as explanações das docentes, tenha favorecido a situação. Por este motivo, pensaram em melhor avaliar seus planejamentos, no sentido de mensurar o tempo disponível à cada atividade, especialmente por já conhecer o rendimento da turma.

5.3 ENCONTRO VI

5.3.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 6º ENCONTRO

(10/07/2021)

Público-Alvo:

Educandos inscritos no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT).

Tempo de execução:

2 horas e 30 minutos.

Conteúdo:

Geometria analítica, estudo da circunferência.

Objetivo Geral:

Espera-se que, por meio das aulas ministradas, os alunos mostrem-se capazes de:

- Representar e identificar analiticamente a circunferência.

Objetivos Específicos:

Mediante a execução de aulas pautadas na resolução de problemas, bem como na participação ativa dos discentes, objetiva-se que os educandos se apresentem aptos a:

- Definir equação geral e reduzida da circunferência;
- Identificar posição de pontos e de retas em relação à circunferência assim como posições relativas entre circunferências.

Recursos Didáticos:

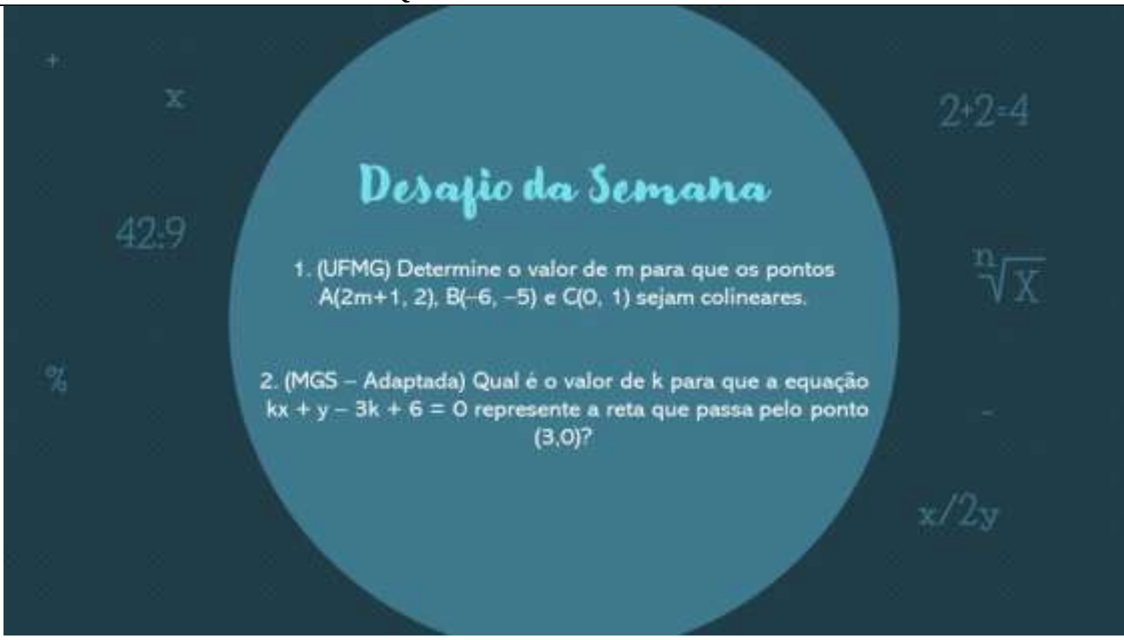
Slides, caderno, lápis, borracha.

Encaminhamento metodológico:

Com a finalidade de atingir os objetivos supracitados, serão desenvolvidas as seguintes atividades:

1. (20 minutos) Correção do desafio composto por 2 exercícios, aplicado na aula anterior. Os grupos que responderem, recebe os pontos destinados a atividade.

Quadro 54 - Desafios



Fonte: Acervo das autoras.

Resolução:

1)

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & 2 & 1 \\ -6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-5(2m+1) - 6 - 2m - 1 + 12 = 0$$

$$-10m - 5 - 6 - 2m - 1 + 12 = 0$$

$$-8m = 12 - 12 \to m = 0$$

Logo o determinante é igual a 0.

2) Para que o ponto A(7,0) (em que 7 é a coordenada x e 0 é a coordenada y), esse ponto deve pertencem ao gráfico. Logo:

$kx - y - 3k + 6 \ = \ 0$

$k \cdot 5 - 0 - 3k + 6 \ = \ 0$
$5k - 3k + 6 \ = \ 0$
$2k + 6 \ = \ 0$
$2k \ = \ -6$
$k \ = \ -\frac{6}{2}$
$\boldsymbol{k \ = \ -3}$

Fonte: As autoras (2021); UFMG (2014); MGS (2016).

2. (30 minutos) Iniciando o conteúdo destinado a aula, apresentação das definições através dos *slides*.

Quadro 55- Definições

História

Quando falamos em circunferência ou círculo, logo lembramos de uma roda, uma das maiores invenções do ser humano. Provavelmente inventada a 3500 a.C., na região da Suméria ou Mesopotâmia (apesar de controvérsias entre alguns pesquisadores), a roda tornou o transporte mais fácil e rápido, além de contribuir para transformar as primeiras aglomerações humanas em cidades maiores.

Figura 77- Circunferência história

Fonte: Matemática é facil (2021).[30]

Desde a antiguidade, o ser humano estuda astronomia para entender o mundo a nossa volta, e a muito tempo foi descoberto o formato arredondado do planeta Terra, de outros planetas e também da lua. Eratóstenes (276 a.C. – 194 a.C.) calculou, pela primeira vez o cálculo exato da circunferência da Terra, através de seu raio (usando a geometria euclidiana). Ptolomeu (90 d.C. – 168 d.C.), com sua conhecida ilustração do sistema geocêntrico (a Terra é o centro do universo) no livro "Almagesto", apesar de não estar correto em sua afirmação, já ilustrou o planeta Terra em forma arredondada

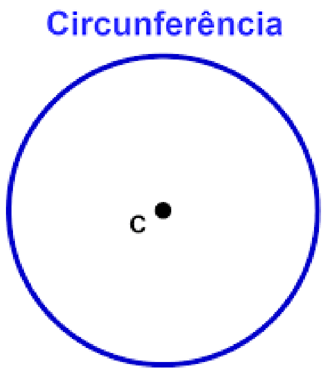
Fontes: Astronomia no Zênite (2021).[31]

Definição

Circunferência é uma figura geométrica pertencente ao plano que é constituída pelo conjunto de todos os pontos igualmente distantes de um ponto fixo desse plano.

[30]Disponível em: https://www.matematicaefacil.com.br/2015/07/diferencas-historias-curiosidades-circunferencia-circulo.html
[31]Disponível em: https://www.zenite.nu/eratostenes-e-a-circunferencia-da-terra

Figura 78 - Circunferência



Fonte: Escola Educação (2021).[32]

Raio e Diâmetro

O diâmetro da circunferência é um segmento de reta que passa pelo centro da figura, dividindo-a em duas metades iguais.

Já o raio da circunferência é um segmento que liga o centro da figura a qualquer ponto localizado em sua extremidade.

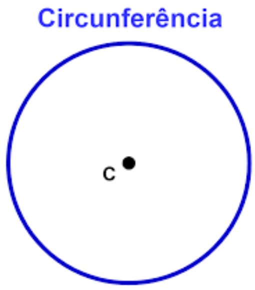
Figura 79 - Definições circunferência

Fonte: Tenor, 2021[33]

Área e comprimento

Para calcular a área da circunferência $\mathbf{A = \pi.r^2}$

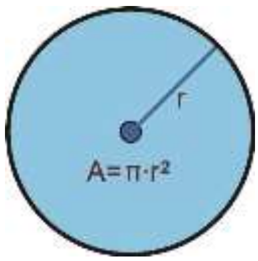
[32] Disponível em: https://escolaeducacao.com.br/elementos-da-circunferencia/
[33] Disponível em: https://tenor.com/es/ver/circunferencia-cursinho-matematica-circumference-math-gif-14330573



Fonte: Escola Educação (2021).[34]

Para calcular o comprimento da circunferência **C= 2.π.r**

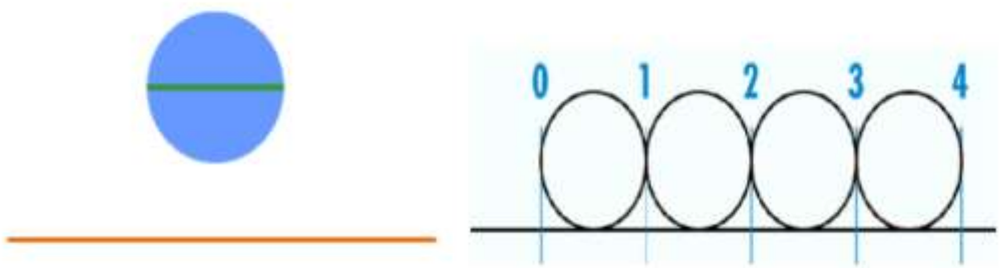
Figura 80- Comprimento Circunferência



Fonte: Nicoli Tomazella (2014).[35]

Circunferência e o número π.

Devido à relação $\frac{comprimento}{diâmetro}$ nas regiões circulares, conseguimos descobrir um valor constante, aproximadamente igual a 3,14. Esse número irracional ficou conhecido por "pi", o qual é representado pelo símbolo π.



Fontes: Maria Rincon (2014)[36]; Ajuda alunos (2021).[37]

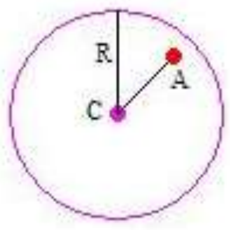
Posições relativas de um ponto e circunferência

---

[34] Disponível em: https://escolaeducacao.com.br/elementos-da-circunferencia/
[35] Disponível em: https://www.estudokids.com.br/area-de-uma-circunferencia/
[36] Disponível em: https://www.google.com/search?q=circuferencia+gif&tbm=isch&ved=2ahUKEwj5-bymqNnyAhViu5UCHfjBCmMQ2-cCegQIABAA&oq=circuferencia+gif&gs_lcp=CgNpbWcQAzIHCCMQ7wMQJzoFCAAQgAQ6BAgAEB46BggAEAgQHjoGCAAQChAYUK_VBljr4AZg4OEGaABwAHgAgAHiAYgB2wSSAQUwLjEuMpgBAKABAaoBC2d3cy1
3aXotaW1nwAEB&sclient=img&ei=OxstYbnwOOL21sQP-IOrmAY&rlz=1C1GCEA_enBR875BR875#imgrc=ZnPahvLNxoWJvM
[37] Disponível em: http://www.ajudaalunos.com/Quiz_mat/circulo_html/cloze_valorpi.htm

Um ponto pode ser interno, externo ou pode pertencer a uma dada circunferência de centro C e raio r.

P é interno

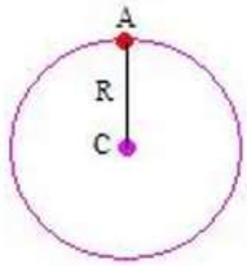


Fonte: Só escola (2015).

$$d(C,P) < r$$

$$\boldsymbol{d(C,P) = \ (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 < 0}$$

P ∈ ciruferência

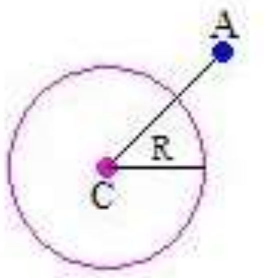


Fonte: Só escola (2015).

$$d(C,P) = r$$

$$\boldsymbol{d(C,P) = \ (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0}$$

P é **externo**



Fonte: Só escola (2015).[38]

$$\boldsymbol{d(C,P) > r}$$

$$\boldsymbol{d(C,P) = \ (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 > 0}$$

[38] Disponível em: https://www.soescola.com/2015/11/posicao-relativa-entre-ponto-e.html

3 – (10 minutos) Aplicação de um exercício, a fim de concretizar o conteúdo abordado exposto no quadro.

Quadro 56 - Exercício

Determine a posição do ponto A(-2,3) em relação da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$ Resolução: $$x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$$ $$(-2)^2 + (3)^2 + 8x - 20 = 0$$ $$4 + 9 + 8x - 20 = 0$$ $$8x - 7 = 0$$

Fonte: Brasil Escola (2019).

4- (15 minutos) Aplicação de um exercício, para que tentem resolver individualmente. Será destinado 5 minutos para que os alunos releixem a resolução e após será realizada a correção.

Quadro 57 - Exercício

1- **(UFRGS – 2015)** Considere as circunferências definidas por $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ e $(x - 10)^2 + (y - 2)^2 = 9$, representadas no mesmo plano cartesiano. As coordenadas do ponto de interseção entre as circunferências são: **Resolução:** Resolvendo o sistema. $$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 16 \\ (x - 10)^2 + (y - 2)^2 = 9 \end{cases}$$ Isolando $(y - 2)^2$ $$\begin{cases} (y-2)^2 = 16 - (x-3)^2 \\ (y - 2)^2 = 9 - (x - 10)^2 \end{cases}$$ Igualando as equações: $$16 - (x-3)^2 = 9 - (x-10)^2$$ $$16 - (x^2 - 6x + 9) = 9 - (x^2 - 20x + 100)$$ $$16 - x^2 + 6x - 9 = 9 - x^2 + 20x - 100)$$ $$-x^2 + 6x + 7 = -x^2 + 20x - 91$$ $$14x = 98$$ $$x = \frac{98}{14}$$ $$x = 7$$

Substituindo x por 7

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

$$(7 - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

$$4^2 + (y - 2)^2 = 16$$

$$16 + (y - 2)^2 = 16$$

$$(y - 2)^2 = 16 - 16$$

$$(y - 2)^2 = 0$$

$$y = 2$$

Fonte: UFRGS (2015).

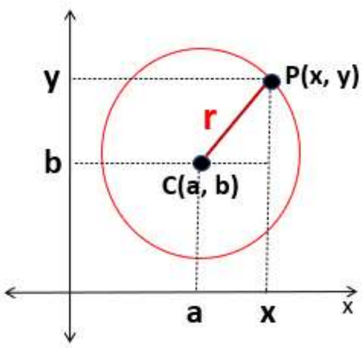
5- (10 minutos) Retomada de conteúdo através dos *slides*.

Quadro 58 - Equação reduzida da circunferência

EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Assim, como no encontro anterior obtivemos a equação da reta, podemos determinar a equação da circunferência.

A partir de sua definição como lugar geométrico, vamos estabelecer uma relação para um ponto qualquer P(x,y) que pertence a circunferência de centro C(a,b) e raio r.



Fonte: Acervo das autoras

O ponto P(x,y) pertence á circunferência se, e somente se, $d_{c,p} = r$.

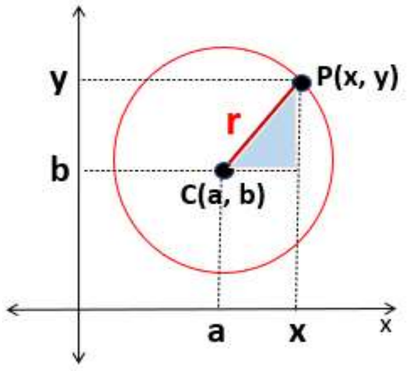
Logo:

$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

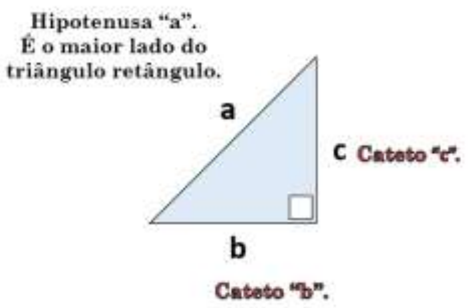
Essa equação é conhecida como equação reduzida da circunferência de centro em C(a,b) e raio r.



Fonte: Acervo das autoras

Você lembra do Teorema de Pitágoras

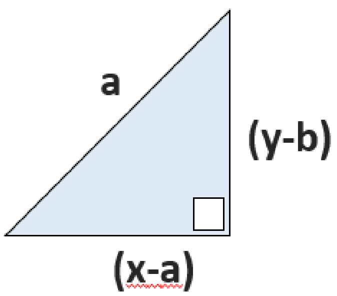
O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos



Fonte: Acervo das autoras.

Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

Na circunferência, temos o triângulo retângulo de raio r, cateto (x – a) e cateto (y – b). Dessa forma, ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras, encontramos a equação reduzida da circunferência.



Fonte: Acervo das autoras.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

Equação reduzida da circunferência.

Fonte: Acervo das autoras.

6 – (5 minutos) Aplicação de um exemplo referente ao conteúdo abordado.

Quadro 59 - Exemplo

Exemplo 2

Considerando a equação da circunferência $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$, determine o centro e o raio dessa circunferência.

Resolução:

Vamos comparar a equação reduzida da circunferência com a equação da situação proposta.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$$

Fonte: Acervo das autoras

$$-\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{2} \cdot (-\boldsymbol{1}) \rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{2}$$

$$-\boldsymbol{b} = +\boldsymbol{5} \cdot (-\boldsymbol{1}) \rightarrow \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{5}$$

$$\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{16} \rightarrow \boldsymbol{r} =$$

Fonte: Wagner Filho2(019).

8- (15 minutos) - Retomada do conteúdo através dos *slides*.

Quadro 60 - Definições

Equação geral da circunferência

Antes de determinarmos a equação geral da circunferência, vamos relembrar a regra dos produtos notáveis: o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois termos.

Exemplo 1:

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{2ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Quadrado da diferença de dois termos.

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{2})^2 \rightarrow \boldsymbol{a^2} - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{2} + \boldsymbol{2^2} \rightarrow \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{4a} + \boldsymbol{4}$$

Exemplo 2:

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{2ab} + \boldsymbol{b}^2$

Quadrado da soma de dois termos.

$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{3})^2$

$\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{3} + \boldsymbol{3}^2$

$\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{6b} + \boldsymbol{9}$

Para determinar a equação geral da circunferência, utilizaremos a equação reduzida da circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ e resolveremos os produtos notáveis: quadrado da diferença de dois termos.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Equação geral da circunferência.

Essa equação é também chamada de equação normal da circunferência.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Observe que essa equação pode ser escrita como:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Onde c é o termo independente e

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{r}^2$$

Dessa forma, verificamos que ela é uma equação incompleta do 2º grau com duas variáveis, já que a completa é do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Cx + Ey + F = 0$$

Fonte: Wagner Filho (2019).

7 – (5 minutos) Aplicação de um exemplo referente ao conteúdo abordado.

Quadro 61 - Exemplo

Exemplo 2

Escreva a equação geral da circunferência, que tem centro C(-1, 2) e raio r = √3.

Resolução:

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{2ax} - \boldsymbol{2by} + \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{6x} + \boldsymbol{8y} + \boldsymbol{5} = \boldsymbol{0}$$

$$-\boldsymbol{2a} = -\boldsymbol{6} \, . (-\boldsymbol{1}) \therefore \boldsymbol{a} = \boldsymbol{3}$$

$$-2b = 8 \therefore b = -4$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = 5$$

$$(3)^2 + (-4)^2 - r^2 = 5$$

$$9 + 16 - r^2 = 5$$

$$r^2 = 20 \therefore r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Conclusão C(3, -4) e r = 2√5 .

Fonte: Wagner Filho (2019).

8 – (15 minutos) Exercício para a fixação do conteúdo.

Quadro 62 - Exercício

(UNIOESTE 2019) Considere as equações y = 4x - 5 e y = x^2 - 5x + 3. Suponha que os pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) satisfaçam as duas equações e que $x_1 < x_2$. Suponha ainda que o par (4, y_3) satisfaça somente a primeira equação. Indique a equação da circunferência, que tem centro em (4, y_3) e que passa pelo ponto (x_2, y_2).

Resolução:

Os pares ordenados (x1; y1) e (x2; y2) satisfazem as duas equações:

$$4x + 5 = x^2 - 5x + 3 \rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$x = 1 \; ou \; x = 8, x < 2 \; \leftrightarrow x1 = 1 \; e \; x2 = 8$$

$$(x1;\; y1) = (1, -1) \; e \; (x2;\; y2) = (8{,}27)$$

O par (4; y3) satisfaz a primeira equação

$$y = 4x - 5 \rightarrow y3 = 4 \cdot 4 - 5 \rightarrow y3 = 11$$

Calculando a distância de (4,11) e (8,27) para descobrir o raio

$$r^2 = (4 - 8)^2 + (11 - 27)^2 \rightarrow r^2 = 272$$

Substituindo:

$$(x - 4)^2 + (y - 11)^2 = 272$$

Fonte: Unioeste (2019).

9- (30 minutos) Desafio dos balões – Vamos projetar para os alunos um jogo com algumas questões referente ao conteúdo abordado durante a aula. O jogo consiste em os alunos estourarem os balões e responderem as questões.

Figura 81- Desafio dos balões

Fonte: Acervo das autoras.

Avaliação:

A avaliação dos estudantes se desenvolverá no decorrer das aulas, no desenvolvimento das atividades, participação durante a resolução dos problemas por meio das respostas orais, registros e análises individuais nas folhas.

Referências:

CARLOS CARVALHO (Minas Gerais). Ministério da Educação (ed.). **M.E.C. Manual do Estudante Cedic**. 3. Ed. Belo Horizonte: Cedic, 2010. 990 p.

CADERNO DE EXERCICIOS – **OBEMEP.** Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/h33tf5r3nqgoc.pdf. Acesso em: 06 ago. 2020.

CONCURSO Público-Escola de Sargentos das Armas (Essa). São Paulo: Opção, 2016. 83p.

DUTRA, Alexander dos Santos; CARVALHO, Alexandre Luís Trovon de; VALEÇO, Ingrid Regina Pellini. **Matemática (Ensino médio)**. Tatuí: Casa Publicadora Brasileira, 2017. 64 p. (3ºano)

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilce. **Matemática e ciência e aplicações: Volume 3. Ensino médio**. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática**. Vol. 3. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **MATEMÁTICA PAIVA**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

QUESTÃO 175 – **ENEM**. Disponível em: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2013/segundo-dia/nos-ultimos-anos-televisao-tem-passado-por-uma-verdadeira-revolucao-em-termos-de-qualidade/. Acesso em: 06 ago. 2020.

5.2.2 Relato VI

Relatório Promat – Sexto Encontro

Aos dez de julho do corrente ano, as estagiárias Fernanda Carla de Oliveira, Karla Katrine Pereira Cazarotto e Nadya Beatriz Antunes Barroso, da quarta série do curso de Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel, desempenharam, sob a orientação da professora Pamela Gonçalves, sua sexta prática no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (Promat), que neste ano, ocorre virtualmente, por meio da plataforma *Jitsi*.

Iniciada com a correção do desafio proposto aos alunos no encontro anterior, a aula, que tratou sobre a equação da circunferência, contou com a participação de sete estudantes.

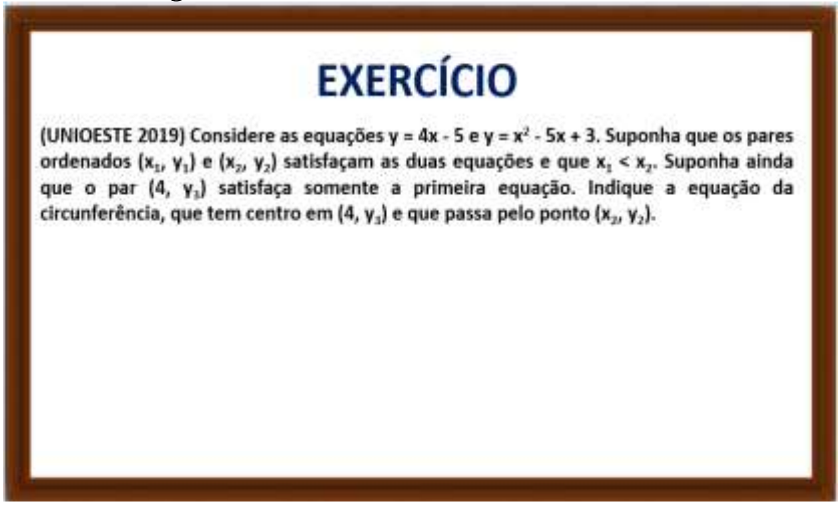
À princípio, as estagiárias trabalharam, por meio do emprego de *slides*, com algumas definições acerca da circunferência. Grosso modo, retomaram o conceito de circunferência, além das ideias de corda, raio e diâmetro, área e comprimento.

Quanto à equação reduzida, sua obtenção foi explanada de duas formas: calculando-se a distância entre os pontos que correspondem às extremidades do raio de uma circunferência de centro C(a,b); aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo formado a partir das extremidades do raio e suas projeções nos eixos x e y.

Para a dedução da equação geral, as acadêmicas trabalharam, preliminarmente, com os produtos notáveis, uma vez que seriam importantes para o desenvolvimento dos termos da equação reduzida. Assim, depois de retomarem as ideias de quadrado da soma e quadrado da diferença entre dois termos, manipularam a expressão anteriormente obtida (equação reduzida), de modo a determinar a equação geral da circunferência. Ademais, comentaram sobre o fato desta também ser conhecida como equação normal da circunferência.

Durante o estudo das primeiras definições, bem como das equações das circunferências, os alunos, que participaram essencialmente pelo *chat* da plataforma, disseram ter conseguido acompanhar as explicações. Entretanto, no momento em que uma questão de um dos vestibulares da Unioeste foi proposta, as manifestações foram praticamente unânimes: todos consideraram o exercício muito difícil. De fato, sua resolução envolve uma sequência de passos, que podem gerar alguns enganos. Porém, vale ressaltar que as estagiárias realizaram a correção do exercício, a fim de que os estudantes pudessem acompanhar cada um desses passos.

Figura 82- Questão do vestibular



Fonte: Unioeste (2019)..

Ainda com o uso de *slides,* as docentes partiram para as explicações referentes às posições relativas entre ponto e circunferência. Através de imagens e definições, mostraram os casos em que o primeiro se configura como interno, externo e pertencente à circunferência, ao passo em que os alunos procuravam contribuir por meio de comentários no *chat*. Um exemplo e um exercício também foram aplicados.

Na sequência, foram trabalhadas as posições relativas entre reta e circunferência (externa, tangente, secante) e, para tal, a expressão que permite o cálculo da distância entre ponto e reta foi apresentada. Após, as estagiárias resolveram uma questão, de modo a exemplificar a determinação das posições e aplicaram um exercício advindo de mais um vestibular, desta vez da Universidade Estadual de Maringá (UEM). Este foi corrigido depois de passados os minutos destinados à resolução por parte dos estudantes.

Antes que o encontro terminasse, as docentes mostraram, aos alunos, as posições relativas entre duas circunferências, isto é, os casos em que são externas, internas, tangentes (externa e internamente), secantes e concêntricas. Um exemplo foi fornecido, mas, devido ao tempo, as estagiárias não puderam passar um novo exercício.

Ademais, embora tivessem preparado um momento de interação entre os grupos, como forma de fixar os conteúdos e continuar promovendo a competição instituída no terceiro encontro, as acadêmicas não puderam realizá-lo pela falta de tempo. Assim, propuseram enviar as questões que compunham a atividade, de modo que os estudantes buscassem solucioná-las durante a semana.

O fato dessa já se configurar sua sexta prática no programa em muito contribuiu para com o desenvolvimento do encaminhamento metodológico. Cada vez mais familiarizadas com a turma e com o ensino à distância, as acadêmicas vêm construindo uma bagagem que as permite resolver situações de maneira rápida e tranquila. Por exemplo: questões relacionadas a conexão dos alunos têm sido contornadas por meio do grupo da turma, no *WhatsApp*. E, durante as explicações, à medida em que os estudantes se manifestam no *chat*, principal canal de comunicação entre a turma e as docentes, as acadêmicas têm assumido o papel de porta-voz, a fim de que aquela que está com a palavra possa ter o retorno imediato dos alunos, uma vez que, ao compartilhar sua tela de *slides*, as estagiárias não podem ver a plataforma.

6. MÓDULO III

6.1 ENCONTRO VII

6.1.1 Plano de aula

PLANO DE AULA – 7° ENCONTRO

(17/07/2021)

Público-Alvo:
Educandos inscritos no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT).
Tempo de execução:
2 horas e 30 minutos.
Conteúdos:
Análise combinatória (Princípio Fundamental da Contagem, permutação).
Objetivo Geral:
Objetiva-se que, por meio desta sequência, os alunos mostrem-se capazes de:
- Utilizar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) na resolução de problemas;
- Distinguir casos de permutação simples e permutação com repetição.

Objetivos Específicos:
Mediante a execução dos encaminhamentos metodológicos descritos à frente, espera-se que os estudantes possam:
- Proceder a resolução de exercícios envolvendo o princípio multiplicativo do PFC;
- Empregar o princípio aditivo do PFC na resolução de problemas;
- Conhecer a diferença entre permutação simples e permutação com repetição;
- Resolver problemas referentes à permutação (simples e com repetição);
- Utilizar o conceito de fatorial na resolução de problemas da Análise Combinatória.

Recursos Didáticos:
Programa para a edição de *slides*, *WhatsApp*, Outlook, caderno, lápis e borracha.
Encaminhamento metodológico:

Com a finalidade de atingir os objetivos supracitados, serão desenvolvidas as seguintes atividades:

1. (5 minutos) Proposta do desafio enunciado no quadro, como forma de fomentar a competição entre as equipes já formadas e introduzir a ideia de Princípio Fundamental da Contagem. Cada questão será apresentada separadamente, a fim de que os estudantes possam discutir a respeito de sua resolução nos grupos do *WhatsApp*. Na sequência, as docentes realizarão a respectiva correção, comentando sobre a utilidade do diagrama de árvore.

Quadro 63- Desafio

1. Elsa tem 2 camisetas e 3 calças de cores diferentes. Ela vai à escola de segunda a sexta, mas não quer repetir um mesmo conjunto de calça e camiseta na mesma semana. Elsa conseguirá realizar seu desejo?

- *Resolução:*

Sim, pois existem seis diferentes possibilidades.

2. E se Elsa acrescentar 2 pares de tênis, quantas combinações serão possíveis?

- *Resolução:*

Há 12 combinações possíveis.

Fonte: Luiz Pereira (2020).

2. (10 minutos) Apresentação, por meio de *slides*, do conceito de Análise Combinatória, assim como das informações acerca do PFC;

Quadro 64 - Análise Combinatória

Análise Combinatória Análise Combinatória é uma parte da matemática que estuda e desenvolve método para a resolução de problemas que envolvem contagem, basicamente, em escolher e agrupar os elementos de um conjunto. Possui aplicação direta no cálculo das probabilidades, sendo instrumento de vital importância para as ciências aplicadas, como a Medicina, a Engenharia e a Estatística, entre outras. **História da Análise Combinatória** Os estudos que levaram ao conceito da Análise Combinatória tiveram início por volta de século XVI, devido à necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos conhecidos Jogos de Azar. Tais estudos foram iniciados pelos matemáticos Niccollo Fantana (1500-1557), conhecido como Tartáglia e mais tarde vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662). **Princípio Fundamental da Contagem** O Princípio Fundamental da Contagem nos mostra um método algébrico para determinar o número de possibilidades de ocorrência de um acontecimento sem precisar descrever todas as possibilidades. Sendo assim, temos: • Princípio Aditivo; • Princípio Multiplicativo.

3. (5 minutos) Proposta de um novo desafio aos alunos. Desta vez, cada um deverá, a partir das regras previamente enunciadas (figura 1), descobrir a senha de um *e-mail* criado especialmente para esta aula. O intuito do desafio é o de servir como uma introdução à definição formal do princípio multiplicativo do PFC. Além disso, este também será utilizado como forma de dar continuidade à competição que, desde o terceiro encontro, vem sendo fomentada – por isso a restrição de tempo;

Figura 83- Regras do desafio da senha

Fonte: As autoras.

4. (5 minutos) Motivação de um bate-papo, com os estudantes, a respeito do desafio proposto em 3. Realização de comentários acerca dos motivos que impossibilitaram a descoberta da senha elaborada;

5. (5 minutos) Exibição, por meio do compartilhamento de *slides*, de algumas senhas possíveis, a fim de que os alunos percebam que o número de combinações, segundo as regras impostas, é muito grande;

6. (10 minutos) Apresentação, como forma de descobrir a quantidade de senhas possíveis, o princípio multiplicativo do PFC;

Quadro 65 - Princípio multiplicativo

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é *m* e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é *n*, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto *m.n.*

Fonte: DANTE (2016).

Figura 2: Quantidade de senhas possíveis

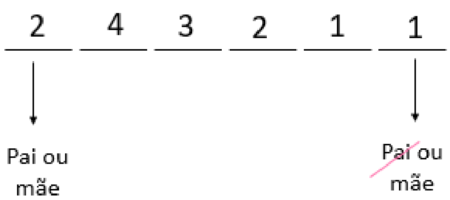
Fonte: As autoras.

7. (10 minutos) Revelação da senha escolhida e aplicação de um exercício envolvendo o princípio multiplicativo, a ser corrigido através do compartilhamento de *slides*, logo após o tempo destinado à resolução por parte dos discentes;

Quadro 66 - Exercício princípio multiplicativo

(Unifor–CE) Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

➢ *Resolução:*



Realizando a multiplicação,

$$2.4.3.2.1.1 = 48$$

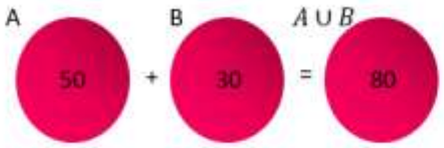
Assim, há 48 possibilidades distintas.

Fonte: VEST MAPA MENTAL (2021).

8. (10 minutos) Apresentação de *slide* sobre o princípio aditivo do PFC e, posterior, aplicação de um exercício, cuja correção se dará após a resolução dos estudantes;

Quadro 67 - Princípio aditivo

Se A e B são conjuntos disjuntos, com p e q elementos respectivamente, então $A \cup B$ tem $p + q$ elementos.



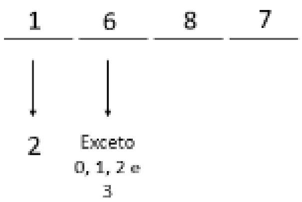
Fonte: CERRI; DRUCK (2019).

Quadro 68 - Exercício princípio aditivo

Quantos números de quatro dígitos são maiores que 2400 e têm todos os dígitos diferentes?

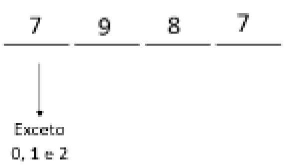
- *Resolução:*

Caso 1 (2401 a 2987)



$$1.6.8.7 = 336$$

Caso 2 (3012 a 9876)



$$7.9.8.7 = 3528$$

Assim, 336 + 3528 = 3864 números.

Fonte: CERRI; DRUCK (2019).

9. (15 minutos) Definição dos conteúdos de permutação simples e com repetição, por meio do compartilhamento de *slides*, nos quais, além das definições, serão apresentados alguns exemplos.

Quadro 69 - Permutação simples e com repetição

Permutação simples

Qualquer sequência formada a partir de todos os elementos de um conjunto com n elementos é chamada permutação simples. O total de permutações simples de um conjunto com essa quantidade de elementos é dado por:

$$P_n = n!$$

Fonte: Descomplica (2021).[39]

Exemplo:

De quantas maneiras diferentes 6 amigos podem sentar em um banco para tirar foto?

Resolução:

Utilizando a formula de permutação simples:

$$P_6 = 6! \rightarrow P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \rightarrow P_6 = 720$$

Permutação com repetição

Uma permutação com elementos repetidos acontece quando em um conjunto de n elementos, alguns destes são iguais.
Na fórmula para determinar o número de permutações com repetição, dividimos o fatorial do número total n de elementos, pelo produto entre os fatoriais dos elementos que se repetem.

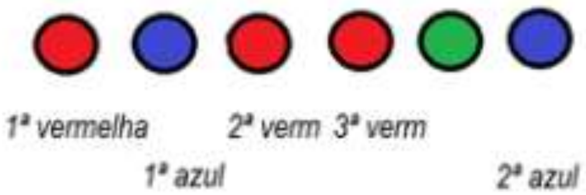
$$\boxed{P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}}$$

Fonte: Alfa Connection, 2021[40]

Exemplo:

De quantas formas podemos ordenar 6 bolas sendo que 2 são verdes, 1 é azul e 3 são vermelhas?

[39] Disponível em: https://descomplica.com.br/blog/acontece/analise-combinatoria-e-probabilidade-para-o-enem/
[40] Disponível em: https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/analise-combinatoria-e-probabilidade/permutacoes/permutacoes-com-repeticao/



Fonte: Marcelo Concli (2018).[41]

Resolução:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!\,2!} \to P_6^{3,2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\,2!} \to P_6^{3,2} = 12\, forma$$

Fonte: Marcelo Concli, (2018); Alfa Connection (2021); Descomplica (2021).

10. (10 minutos) Proposta de questões referentes aos conceitos trabalhados em 9. A correção das atividades, a ser realizada com base em *slides* previamente elaborados, deverá ocorrer após o tempo destinado à resolução dos discentes (cerca de 5 minutos);

Quadro 70 - Exercícios permutação simples e com repetição

Exercício:

1- Os resultados do último sorteio da Megasena foram os números 04, 10, 26, 37, 47 e 57. De quantas maneiras distintas pode ter ocorrido essa sequência de resultados?

Resolução:
Os números sorteados da mega sena formam uma sequência de seis números. Para calcular as formas distintas que esse resultado pode ter sido sorteado, basta calcular:

$$P6 = 6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 \ = \ 720.$$

2) Quantos anagramas podem ser formados com a palavra ITALIANA.

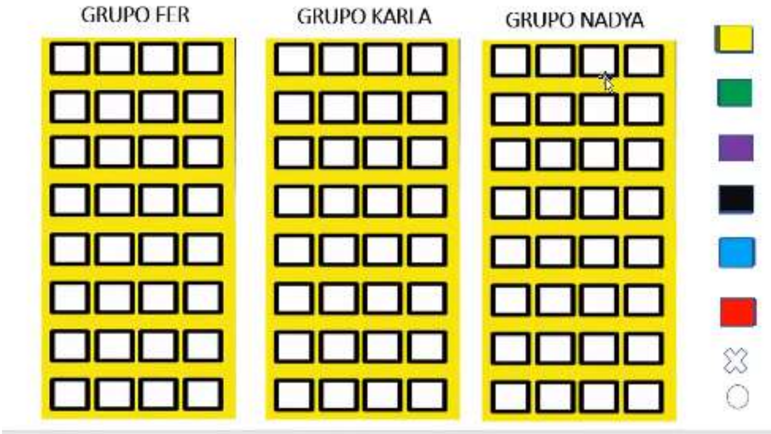
$$P_8^{3,2} = \frac{8!}{3!\,2!} \to P_6^{3,2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\,2!} \to P_6^{3,2} = 3360\, anagrama$$

Fonte: Lorena Leroy (2015).

10. (20 minutos) Realização do *Jogo da Senha*, apresentado na figura 3. Dentro de suas respectivas equipes, os alunos deverão escolher quatro, dentre seis cores dispostas, que, em sua opinião, formem a senha pré-estabelecida – cada equipe possuíra uma senha diferente. Em cada rodada, os estudantes serão informados pelas docentes se, a partir de sua escolha, há cores certas localizadas na posição certa (bolinha) e cores certas localizadas na posição errada (xis). O jogo seguirá desta maneira até que uma das equipes decifre a combinação correta. Ademais, importa mencionar que a comunicação entre os grupos se dará a partir do uso do aplicativo *WhatsApp*;

[41]Disponível em: https://querobolsa.com.br/enem/matematica/permutacao

Figura 84- Jogo da Senha



Fonte: As autoras.

11. (20 minutos) Aplicação de um questionário acerca do jogo, no intuito de relacionar a prática da atividade com o conteúdo de permutação.

Quadro 71 - Questionário sobre o jogo

Questões
1. Qual é a quantidade mínima de posições ou cores certas na primeira tentativa de senha? ➢ *Resolução:* Como há seis cores possíveis para escolher quatro cores distintas na primeira tentativa de senha, então pelo menos duas cores estarão certas 2. Depois de preenchida a primeira casa, de quantas formas diferentes podemos preencher a 2ª casa? ➢ *Resolução:* De 5 maneiras distintas. 3. Depois de preenchida a primeira casa, quantas cores sobram? ➢ *Resolução:* 5 cores. 4. É possível formar uma senha com 3 posições e cores certas e 1 cor certa na posição errada? Por quê? Em caso afirmativo, liste uma senha determinada e uma possível senha com as características listadas acima. ➢ *Resolução:* Não, pois se já têm três cores e posições certas e a outra cor está certa, então essa cor deve estar necessariamente na posição certa.

Fonte: SILVA (2018).

Avaliação: Os alunos serão avaliados com base em suas contribuições durante as discussões promovidas.

Referências:

CERRI, Cristina; DRUCK, Iole de Freitas. **Combinatória sem fórmulas**. 2019. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20192/mat1514/L3.pdf. Acesso em: 7 nov. 2020.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

EXERCÍCIOS PFC. Disponível em: https://www.vestmapamental.com.br/wp-content/uploads/2020/04/Exercicios-5.pdf. Acesso em: 14 jul. 2021.

SILVA, Eriky César Alves da. **O JOGO SENHA E O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM**: uma aplicação no ensino médio. 2018. 74 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 028. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/25552/1/ErikyCesarAlvesDaSilva_DISSERT.pdf. Acesso em: 06 nov. 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**. São Paulo: FTD, 2016.

6.1.2 Relato VII

Relatório Promat – Sétimo Encontro

No dia dezessete de julho do corrente ano, as estagiárias Fernanda Carla de Oliveira, Karla Katrine Pereira Cazarotto e Nadya Beatriz Antunes Barroso, da quarta série do curso de Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel, desempenharam, sob a orientação da professora Pamela Gonçalves, uma nova prática no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (Promat).

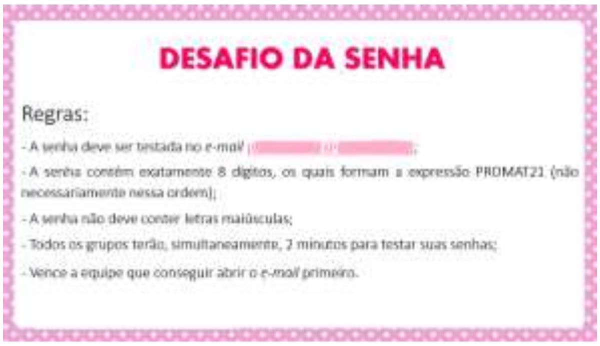
Embora o programa tenha ocorrido virtualmente, por meio da plataforma *Jitsi*, neste sétimo encontro, as estagiárias precisaram migrar para o *Google Meet.* Isso porque, antes mesmo de iniciar a aula, notaram que a função que permite compartilhar apresentações não estava funcionando. Depois de algumas tentativas, infelizmente fracassadas, optaram por utilizar a ferramenta do *Google.*

Assim, a aula que tratou de Análise Combinatória – mais especificamente, sobre Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e Permutação – foi inaugurada através de alguns desafios, nos quais, dada certa quantidade de calças e camisas, os estudantes deveriam determinar o número de combinações possíveis entre tais elementos.

Além de fazer parte da competição que vem sendo fomentada desde o terceiro encontro, o desafio serviu para introduzir o conteúdo e apresentar o diagrama de árvore como um recurso a ser utilizado em situações como as enunciadas. Mas importa destacar que todos se saíram muito bem e, inclusive, ao justificarem suas respostas, não mencionaram ter empregado o diagrama, e sim ter realizado multiplicações (PFC).

No mais, os estudantes foram apresentados à definição de Análise Combinatória. Sequencialmente, como forma de aprofundar os estudos quanto ao PFC, um novo desafio foi proposto: os alunos deveriam decifrar a senha de um *e-mail*. A ideia era que, dentro de dois minutos, acessassem o *e-mail* criado para a atividade e testassem as senhas elaboradas, conforme as regras previamente estabelecidas.

Figura 85- Regras do desafio



Fonte: As autoras.

Durante o desafio, alguns alunos disseram não saber como acessar o *webmail*. Por este motivo, as estagiárias enviaram o *link* que lhes encaminharia direto à página de *login*, passando a marcar o tempo novamente.

Depois de muitas tentativas, o tempo acabou e, como previsto, nenhuma equipe conseguiu descobrir a senha. Assim, conversaram com os alunos sobre o motivo de não terem descoberto a combinação. Alguns se manifestaram dizendo que existiam muitas possibilidades.

As acadêmicas propuseram, então, contabilizar as combinações possíveis. Iniciaram mostrando algumas possibilidades e o quão penoso seria elencar todas para, enfim, se obter o número de total. Desta forma, apresentaram, agora formalmente, o Princípio Multiplicativo do PFC.

Após, retornaram ao problema da senha, de modo a, por meio do PFC, determinarem a quantidade de combinações possíveis. Neste momento, os alunos mostraram-se bastante participativos: forneciam os dados, à medida em que as docentes os organizavam em um quadro. Por fim, descobriram que, partindo das regras estabelecidas, era possível formar mais de quarenta mil senhas.

Em seguida, os estudantes partiram para a resolução de um exercício, o qual, dados alguns instantes, foi corrigido pelas estagiárias por meio da exibição de *slides*.

Posteriormente, as acadêmicas trataram do Princípio Aditivo. Além da definição, um exercício foi proposto.

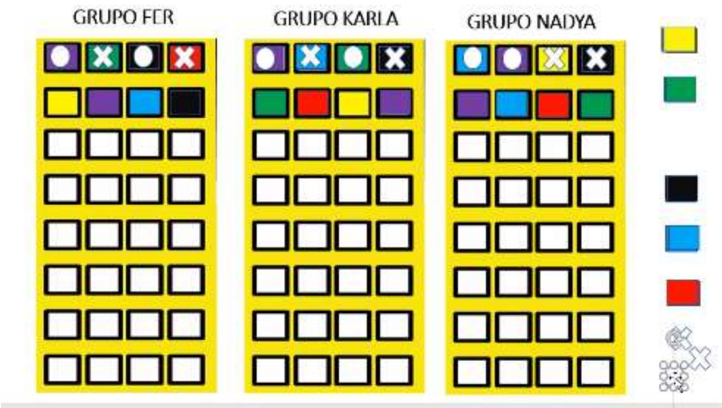
Como o PFC relaciona-se com o conteúdo de Fatorial, alguns *slides* foram exibidos, a fim de possibilitar a explanação acerca do conceito e algumas propriedades. Assim, partindo de uma nova questão, sob a forma de desafio, lembraram os alunos quanto ao procedimento do cálculo e às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Por meio de *slides*, também trabalharam com a permutação (simples, com repetição e circular). Para tal, apresentaram as fórmulas e definições, bem como alguns exercícios que serviram de exemplo. Os alunos também tiveram um momento destinado à resolução de questões, as quais foram, seguidamente, corrigidas pelas docentes.

De modo a continuar trabalhando com o conteúdo de permutação, o Jogo da Senha foi realizado. Basicamente, os alunos, com suas equipes, deveriam escolher quatro, dentre seis cores, que, em sua opinião formavam a senha pré-estabelecida. Conforme elaboravam sua sequência, as estagiárias realizavam a correção, indicando as cores certas localizadas na posição certa (bolinha) e as cores certas localizadas na posição errada (xis).

O jogo seguiu dessa forma até a terceira rodada, quando duas equipes desvendaram suas respectivas senhas.

Figura 86- Execução do jogo



Fonte: As autoras.

Ao fim, as acadêmicas informaram os estudantes de que enviariam, no grupo do *WhatsApp*, algumas questões sobre o jogo, as quais configurariam o desafio da semana.

Nota-se, portanto, que a experiência das docentes no programa, de fato, em muito contribuiu com questões relacionadas à sua prática. À medida em que as aulas vêm ocorrendo, melhor as estagiárias têm lidado com a preparação das atividades, especialmente em relação ao dimensionamento do tempo. Neste sétimo encontro, por exemplo, todo o planejamento foi cumprido, de modo que os estudantes puderam resolver exercícios, tirar suas dúvidas e interagir entre os grupos.

6.2 ENCONTRO VIII

6.2.1 Plano de aula

PLANO DE AULA – 8° ENCONTRO

(24/07/2021)

Público-Alvo:

Educandos inscritos no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT).

Tempo de execução:

2 horas e 30 minutos.

Conteúdos:

Análise Combinatória (arranjo e combinação) e Probabilidade (eventos aleatórios, independentes, equiprováveis e não equiprováveis, união e interseção de eventos).

Objetivo Geral:

Objetiva-se que, por meio desta sequência, os alunos mostrem-se capazes de:

- Resolver problemas envolvendo arranjo e combinação;
- Solucionar questões acerca dos conceitos de Probabilidade.

Objetivos Específicos:

Mediante a execução dos encaminhamentos metodológicos descritos à frente, espera-se que os estudantes possam:

- Conhecer os conceitos de arranjo e combinação, identificando-os em diferentes situações-problemas;
- Distinguir eventos independentes, equiprováveis e não equiprováveis;
- Aplicar, na resolução de problemas, as fórmulas que permitem determinar a probabilidade da interseção e união de eventos.

Recursos Didáticos:

Programa para a edição de *slides*, *WhatsApp*, caderno, lápis e borracha.

Encaminhamento metodológico:

Com a finalidade de atingir os objetivos supracitados, serão desenvolvidas as seguintes atividades:

12. (10 minutos) Retomada, por meio do compartilhamento de *slides*, dos conteúdos de permutação simples e permutação com repetição, de modo a elencar as ideias principais.

Quadro 72 - Permutação

Permutação simples

Permutação simples é qualquer agrupamento que se pode formar com todos os elementos disponíveis no problema, usando cada um deles uma única vez, e que se diferenciam um do outro apenas pela posição em que esses elementos aparecem no agrupamento.

Calcula-se a permutação simples por meio da fórmula

$$P_n = n!$$

Exemplo:

De quantas maneiras distintas podemos colocar em fila indiana 7 meninas e 7 meninos?

- *Resolução:*

Como $7 + 7 = 14\ pessoas,$ é necessário calcular $P_n = 14!$. Assim,

$$P_n = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_n = 87.178.291.200\ maneiras.$$

Permutação com repetição

Uma permutação com elementos repetidos acontece quando em um conjunto de n elementos, alguns destes são iguais. O cálculo de permutação com repetição é dado por meio da fórmula

$$P_n^{(a,b)} = \frac{n!}{a!\,b!}$$

Exemplo:

De quantas formas podemos ordenar 6 bolas sendo que 2 são verdes, 1 é azul e 3 são vermelhas?

- *Resolução:*

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!}$$

$$P_6^{3,2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{3! \cdot\ 2!}$$

$$P_6^{3,2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2}$$

$$P_6^{3,2} = \frac{360}{6}$$

$$P_6^{3,2} = 60\ forma.$$

Fonte: Vitoria Rosa (2019).

13. (10 minutos) Resolução, através da exibição de *slides*, de dois exercícios referentes aos conteúdos descritos no quadro 1;

Quadro 73- Exercícios de permutação

1. (PUC – SP) Formados e colocados em ordem crescente todos os números de 4 algarismos obtidos com os algarismos 1,3,5 e 7 (sem repetir), que lugar ocupa o número 5.731?

➢ *Resolução:*

$\underline{1}\ \ \underline{3}\ \ \underline{5}\ \ \underline{7}\ \rightarrow P_n = n! \rightarrow P_n = 4! \rightarrow P_n = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \rightarrow P_n = 24\,formas$

$\underline{1}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{3!}\ \rightarrow P_n = 1\cdot 3! \rightarrow P_n = 3\cdot 2\cdot 1 \rightarrow P_n = 6$

1357, 1375, 1537, 1573, 1735 e 1753.

$\underline{3}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{3!}\ \rightarrow P_n = 1\cdot 3! \rightarrow P_n = 3\cdot 2\cdot 1 \rightarrow P_n = 6$

3157, 3175, 3517, 3571, 3715 e 3751

$\underline{5}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{3!}\ \rightarrow P_n = 1\cdot 3! \rightarrow P_n = 3\cdot 2\cdot 1 \rightarrow P_n = 6$

5137, 5173, 5317, 5371, 5713 e 5731.

Logo, 5.731 ocupa a 18ª posição.

2. (Enem 2020) Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE” gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”. Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

➢ *Resolução:*

$\underline{I}\ \underline{A}\ \underline{M}\ \underline{P}\ \underline{O}\ \underline{T}\ \underline{T}\ \underline{E}\ \underline{R}$

Tem-se, portanto, 4 vogais e 5 consoantes (a letra T é repetida por duas vezes). Como se deseja intercalar vogais e consoantes, isto é,

$\underline{C}\ \underline{V}\ \underline{C}\ \underline{V}\ \underline{C}\ \underline{V}\ \underline{C}\ \underline{V}\ \underline{C}$

Desse modo,

$$P_n^{a,b} = \frac{n!}{a!\cdot b!} \rightarrow P_5^2 = \frac{5!}{2!}\cdot 4! \rightarrow P_5^2 = \frac{5!\,4!}{2}$$

Fontes: Inep (2020); Joaquim Rodrigues (2021).

14. (7 minutos) Apresentação de uma questão, na forma de desafio, de modo a iniciar a abordagem do conceito de arranjo simples; destinação de cerca de cinco minutos para que os estudantes, juntamente com suas equipes – a comunicação se dará através do aplicativo *WhatsApp* –, procurem solucioná-la;

Quadro 74 - Desafio

Em uma corrida olímpica, 8 competidores estão disputando a corrida. De quantas maneiras diferentes é possível formar o pódio dessa corrida, com os medalhistas de ouro, prata e bronze?

- *Resolução:*

Esse é um problema de análise combinatória em que a ordem importa, pois nesses 3 componentes do grupo, existe diferença entre eles, na medalha que possuem. Logo, trata-se de um arranjo. Como há 8 competidores, ao total, realizamos o seguinte cálculo:

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 8.7.6 = 336$$

Fonte: Estudar com você (2021).

15. (15 minutos) Definição formal do conceito de arranjo simples, por meio de explanação oral e compartilhamento de *slides*;

Quadro 75- Arranjo simples

Chamamos de arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, em que $n > p$, a todo agrupamento de *p* elementos escolhidos entre os *n* elementos dados, que se diferenciam um do outro pela ordem em que aparecem no agrupamento ou por sua natureza.

$$\boldsymbol{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Onde:
$A_{n,p}$ = quantidade de arranjos;
n = quantidade de elementos do conjunto;
k = quantidade de elementos por arranjo;
$n \geq k$.

Exemplo:

Suponha que, com os dígitos 2, 3, 4, 5 e 6, você queira criar senhas de três algarismos distintos. Vamos enumerar algumas possibilidades:

- 235 e 352: Nesse caso, os dígitos são os mesmos, porém, estão em ordem diferente, o que faz com que as senhas obtidas sejam diferentes.
- 643 e 523: Nesse caso, as senhas formadas possuem dígitos diferentes, o que as tornam distintas.

Cada um desses números é chamado de arranjo simples dos cinco elementos dados, tomados três a três.

Sobre o uso da fórmula

Existem problemas de arranjo em que não é necessário utilizar a fórmula, por serem problemas simples. Por exemplo: dado o conjunto {a, b, c}, de quantas formas distintas podemos escolher 2 elementos desse conjunto de forma que a ordem seja importante?

Para resolver esse problema, basta reescrevermos os agrupamentos possíveis. Trata-se de um arranjo porque estamos pegando sequências de 2 elementos de um conjunto que possui 3 elementos. Os arranjos possíveis são:

A = {(a, b); (b, a); (a, c); (c, a); (a, d); (d, a); (b, c); (c, b); (b, d); (d, b); (c, d); (d, c)}.

Nesse caso podemos dizer que existem 12 arranjos possíveis, com 3 elementos tomados de 2 em 2.

Fontes: Andreia Aparecida Costa Silva (2021); Raul Rodrigues Oliveira (2021).

16.(5 minutos) Exibição com a devida resolução de um exercício acerca do conceito abordado – os *slides* serão novamente empregados; Realização de comentários a fim de destacar que, no caso dos arranjos, a ordem importa;

Quadro 76 - Exemplo arranjo simples

As senhas de um determinado banco são formadas por quatro dígitos, sendo que os algarismos utilizados não poderiam aparecer duas vezes na mesma senha. Sendo assim, qual e a quantidade de senhas possíveis para esse sistema?   ➢ *Resolução:*   Estamos lidando com um problema de arranjo, pois, em uma senha, a ordem é importante, e há 10 opções de algarismos (todos os números de 0 até 9), dos quais escolheremos 4. Logo, n = 10 e k = 4. $A_{10,4} = \frac{4!}{(10-4)!}$ $A_{10,4} = \frac{10!}{6!}$ $A_{10,4} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!}$ $A_{10,4} = 10.9.8.7 = 5040$

Fonte: Raul Rodrigues Oliveira (2021).

17.(10 minutos) Aplicação de um exercício sobre arranjo simples, a ser resolvido pelos alunos; correção da questão através da exibição de *slides* previamente elaborados;

Quadro 77- Exercício arranjo simples

Em uma empresa, dezoito funcionários se candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor financeiro. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros do conselho da empresa. Vamos determinar de quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita.   ➢ *Resolução:*   Trata-se de um agrupamento de 18 pessoas tomadas 2 a 2, em que n = 18 e k = 2. $A_{18,2} = \frac{18!}{(18-2)!}$ $A_{18,2} = \frac{18!}{16!}$ $A_{18,2} = \frac{18.17.16!}{16!}$ $A_{18,2} = 18.17 = 306$

Fonte: Adaptado de Marco Noé Pedro da Silva (2021).

18. (10 minutos) Explanação a respeito do conteúdo de combinação simples; apresentação de definição formal e exemplos, com base na utilização de *slides*;

Quadro 78 - Combinação simples

A Combinação ($C_{n,p}$) é um tipo de agrupamento da análise combinatória que calcula quantos subconjunto de "p" elementos podemos formar partindo de um conjunto inicial com "n" elementos. Nesse caso, a ordem das combinações não importa, pois trocá-la gera o mesmo resultado.
Por exemplo:
Vamos tomar como base um conjunto "n" formado por 4 elementos (Rafael, Julia, Rodrigo e José).
Queremos agrupá-los em subconjuntos de 2 elementos (2 a 2).
Assim, teremos 6 resultados de possíveis:

Rafael e Julia	Rafael e Rodrigo	Rafael e José
Julia e Rodrigo	Julia e José	Rodrigo e José

Note que trocar a posição dos elementos nos dá o mesmo resultado. Portanto, a ordem não importa.
Para calcular o número de combinações simples, dado certo conjunto de elementos, utilizamos a fórmula

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Onde:
$C_{n,p}$ = quantidade de combinações;
n = quantidade de elementos do conjunto;
p = quantidade de elementos no subconjunto.

Exemplo

Se um time de futsal é formado por 5 pessoas, quantos times podemos formar utilizando 8 pessoas?

- *Resolução:*

Como n = 8 e p = 5, podemos calcular

$$C_{8,5=}\frac{8!}{5!\,(8-5)!}$$

$$C_{8,5=}\frac{8!}{5!\,3!}$$

$$C_{8,5=}\frac{8.7.6.5!}{5!\,3!}$$

$$C_{8,5=}\frac{8.7.6}{3!}$$

$$C_{8,5=}\frac{336}{3.2.1}$$

$$C_{8,5=}56$$

Fontes: Beduka (2021); Adaptado de UFSC (2003).

19. (10 minutos) Proposta de uma questão proveniente do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), de modo que os estudantes busquem solucioná-la; correção, após a resolução dos estudantes, da referida questão, utilizando-se, para tal, *slides* previamente confeccionados;

Quadro 79- Exercício combinação simples

(Enem/2016 - Adaptado) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

- *Resolução:*

Combinação entre os dez tenistas, tomados dois a dois:

$$C_{10,2}=\frac{10!}{2!\,(10-2)!} \rightarrow C_{10,2}=\frac{10!}{2!\,8!}$$

Combinação entre os quatro canhotos, tomados dois a dois:

$$C_{4,2}=\frac{4!}{2!\,(4-2)!} \rightarrow C_{4,2}=\frac{4!}{2!\,2!}$$

O número de possibilidades, de modo que as partidas não sejam disputadas por dois canhotos é de

$$C_{10,2} - C_{4,2} = \frac{10!}{2!\,8!} - \frac{4!}{2!\,2!}$$

$$\frac{10.9.8!}{2!8!} - \frac{4.3.2!}{2!2!} =$$

$$\frac{10.9}{2} - \frac{4.3}{2} =$$

$$\frac{90}{2} - \frac{12}{2} =$$

$$\frac{78}{2} = 39$$

Fonte: Adaptado de Inep (2016).

20. (3 minutos) Introdução aos conteúdos referentes à Probabilidade, por meio da exibição do vídeo *Matemática em toda parte | Futebol – Teoria das Probabilidades*[42]; realização de uma breve roda de conversa com alunos, no intuito de promover uma discussão sobre o vídeo;

21. (20 minutos) Apresentação de *slides* e realização de comentários conforme as informações elencadas no quadro 9; resolução de alguns exercícios a fim de exemplificar os conceitos trabalhados;

Quadro 80 - Probabilidade

Probabilidade no cotidiano

Ao começarmos o estudo da probabilidade, normalmente a primeira ideia que nos vem à mente é a da sua utilização em jogos, mas podemos utilizá-lo em muitas outras áreas. Todos os dias somos confrontados com situações, que nos conduzem a utilizar, intuitivamente, a noção de probabilidade: previsão do tempo, sorteios...

Definição

A palavra probabilidade deriva do latim *probare* (provar ou testar).
Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou conhecidos, sendo também substituída por algumas palavras como “sorte”, “risco”, “azar”, “incerteza”, “duvidoso", dependendo do contexto.

[42] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=rBc5Sp9q6xo&t=2s. Acesso em: 23 jul. 2021.

É o ramo da Matemática que estuda experimentos ou fenômenos aleatórios e através dela é possível analisar as chances de um determinado evento ocorrer.
Desta forma, o cálculo da probabilidade associa a ocorrência de um resultado a um valor que varia de 0 a 1 e, quanto mais próximo de 1 estiver o resultado, maior é a certeza da sua ocorrência.

Experimento aleatório

Um experimento aleatório é aquele que não é possível prever qual resultado será encontrado antes de realizá-lo.
Os acontecimentos deste tipo quando repetidos nas mesmas condições, podem dar resultados diferentes e essa inconstância é atribuída ao acaso.
Um exemplo de experimento aleatório é jogar um dado não viciado (dado que apresenta uma distribuição homogênea de massa) para o alto. Ao cair, não é possível prever com total certeza qual das 6 faces estará voltada para cima.

Fórmula da probabilidade

Em um fenômeno aleatório, as possibilidades de ocorrência de um evento são igualmente prováveis.
Sendo assim, podemos encontrar a probabilidade de ocorrer um determinado resultado através da divisão entre o número de eventos favoráveis e o número total de resultados possíveis:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{n\,(A)}{n\,(\Omega)}$$

Em que,
p(A): probabilidade da ocorrência de um evento A;
n(A): número de casos que nos interessam (evento A);
n(Ω): número total de casos possíveis.

Outros experimentos

Experimentos Determinísticos: são aqueles cujos resultados podem ser determinados antes de sua realização. Por exemplo: quanto tempo levará um carro para percorrer um trajeto de 200 km numa velocidade média de 100 km/h? Não é necessário executar o experimento para determinar a resposta.
Experimentos Estocásticos: em quase todas as observações, em maior ou menor grau, vislumbramos o acaso. Assim, da afirmação “é provável que o meu time ganhe a partida de hoje” pode resultar:

a. que, apesar do favoritismo, ele perca;
b. que, como pensamos, ele ganhe;
c. que empate.

Experimento Aleatório: é todo experimento que, mesmo repetido várias vezes, sob condições semelhantes, apresenta resultados imprevisíveis, dentre os resultados possíveis. Exemplos: lançamento de uma moeda, lançamento de um dado, loteria de números, extração de uma carta de baralho.

- Exemplo:

Se lançarmos um dado perfeito, qual a probabilidade de sair um número menor que 3?

➢ *Resolução:*

Sendo o dado perfeito, todas as 6 faces têm a mesma chance de caírem voltadas para cima. Vamos então, aplicar a fórmula da probabilidade. Para isso, devemos considerar que temos 6 casos possíveis (1, 2, 3, 4, 5, 6) e que o evento "sair um número menor que 3" tem 2 possibilidades, ou seja, sair o número 1 ou o número 2. Assim, temos:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cong 0{,}33 \cong 33\%$$

Ponto amostral

Ponto amostral é o nome formal para “resultado”.
Em um experimento aleatório, qualquer resultado que sair é chamado de ponto amostra
Se lançarmos um dado, o resultado pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
Então, cada um desses números é um ponto amostral desse experimento**.**

Espaço amostral

Representado pela letra Ω, o espaço amostral corresponde ao conjunto de resultados possíveis obtidos a partir de um experimento aleatório.
Por exemplo, ao retirar ao acaso uma carta de um baralho, o espaço amostral corresponde às 52 cartas que compõem este baralho.
Da mesma forma, o espaço amostral ao lançar uma vez um dado, são as seis faces que o compõem, isto é, Ω = {1, 2, 3, 4, 5 e 6}.

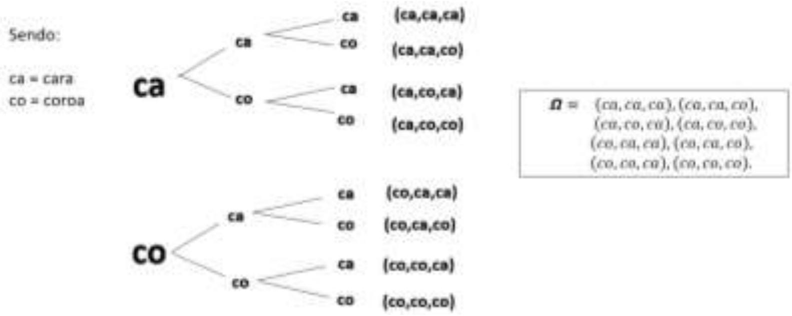
Espaços equiprováveis

Um espaço amostral é classificado como equiprovável quando todos os pontos amostrais dentro dele têm a mesma chance de ocorrer.
Quando lançamos uma moeda, há exatamente 50% de chance de sair cara ou coroa.
Se um dado estiver "viciado", não será mais um espaço equiprovável, pois haverá mais chance de sair o número pesado do que os demais.
Se o dado estiver viciado a ponto de sair sempre o mesmo número, mais nenhum outro, não será nem sequer um experimento aleatório.

- Exemplo:

Determinar o espaço amostral:
a) três lançamentos consecutivos de uma moeda comum.

➢ *Resolução:*



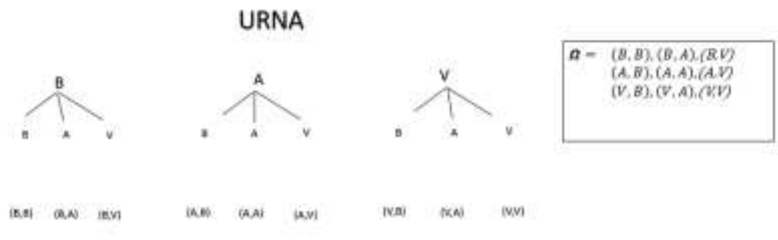
Fonte: Toda Matéria (2021).

22. (5 minutos) Aplicação de um exercício, de modo que os alunos possam, primeiramente, procurar resolvê-lo sozinhos, e, após, as docentes realizem a correção a partir do compartilhamento de *slides*;

Quadro 81 - Exercício probabilidade

Duas retiradas consecutivas e sem reposição de bolas de uma urna que contém 3 bolas brancas, 2 bolas azuis e 4 bolas vermelhas. Determine o espaço amostral.

➢ *Resolução:*



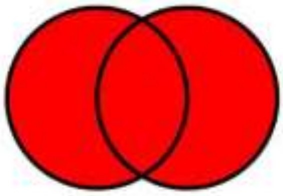
Fonte: Toda Matéria (2021).

23. (15 minutos) Exibição de *slides*, juntamente com a explanação acerca da probabilidade da união e interseção de eventos; realização de exercícios como forma de exemplificar os conceitos;

Quadro 82 - União e interseção de eventos

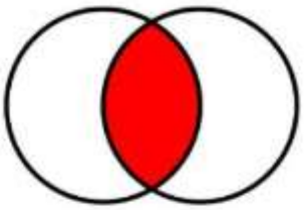
Relembrando...

Um conjunto é estabelecido quando agrupamos elementos com as mesmas características. Esses agrupamentos possuem notação própria, utilizando-se letras maiúsculas para dar nome a eles, e representação específica, em geral por meio de círculos, formando-se o que se conhece como diagrama de Venn, ou listando-se os elementos dos conjuntos.
A união é o conjunto formado pelos elementos de um conjunto mais os elementos dos outros conjuntos. Para representar a união usamos o símbolo ∪.



Exemplo:
Dados os conjuntos A = {c, a, r, e, t} e B = {a, e, i, o, u}, represente o conjunto união (A U B).
A = {c, a, r, e, t}
B = {a, e, i, o, u}
$A \cup B = \{c, a, r, e, t, i, o, u\}$

A interseção de conjuntos corresponde aos elementos que se repetem nos conjuntos dados. Ela é representada pelo símbolo ∩**.**



Exemplo:
Dados dois conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {5, 6, 7}, represente o conjunto intersecção.
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
B = {5, 6, 7}
$A \cap B = \{5,6\}$

Probabilidade da interseção de eventos

A probabilidade da interseção de dois eventos ou probabilidade de eventos sucessivos determina a chance, a possibilidade, de dois eventos ocorrerem simultânea ou sucessivamente. Para o cálculo desse tipo de probabilidade devemos interpretar muito bem os problemas, lendo com atenção e fazendo o uso da seguinte fórmula:

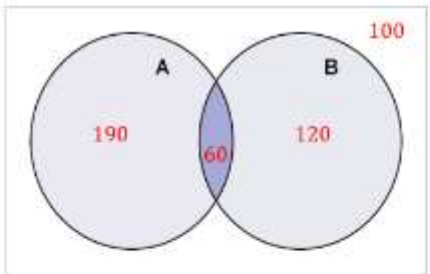
$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)}.$$

- Exemplo:

Numa pesquisa sobre a preferência em relação a dois jornais, foram consultadas 470 pessoas e o resultado foi o seguinte: 250 delas leem o jornal A, 180 leem o jornal B e 60 leem os jornais A e B. Escolhendo um dos entrevistados ao acaso, qual a probabilidade de que ele seja leitor doa jornais A e B?

➢ *Resolução:*

$A: 250 - 60 = 190$
$B: 180 - 60 = 120$



Assim,

$$P(A \cap B) = \frac{60}{470} = \frac{6}{47}$$

Probabilidade da união de eventos

A probabilidade da união de dois eventos é igual a soma das probabilidades de ocorrência de cada um dos eventos, subtraída da probabilidade da ocorrência dos dois eventos simultaneamente. Deste modo,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- Exemplo:

Numa urna há 15 cartões numerados de 1 a 15. Retira-se um cartão ao acaso. Qual é a probabilidade de ser múltiplo de 2 ou 3?

➢ *Resolução:*

$n(U) = 15\ possibidades$

$A\colon\ M(2) = \{2,4,6,8,10,12,14\} \rightarrow\ P(A) = \frac{7}{15}$

$B\colon\ M(3) = \{3,6,9,12,15\} \rightarrow\ P(B) = \frac{5}{15}$

$A \cap B\colon \{6,12\} \rightarrow\ P(A \cap B) = \frac{2}{15}$

Agora, podemos calcular $P(A \cup B)$ fazendo:

$$(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{15} + \frac{5}{15} - \frac{2}{15}$$

$$P(A \cup B) = \frac{10}{15}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

Fontes: Robson Luiz (2021); PrePara Enem (2021); Saber Matemática (2021).

24.(5 minutos) Resolução, por parte dos estudantes, do exercício disposto no quadro a seguir, e posterior correção, a ser efetuada pelas docentes.

Quadro 83 - Exercício probabilidade da união

Retirando-se uma carta de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de retirar uma dama ou carta de copas?

➢ *Resolução:*

A: carta ser uma dama → $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

B: carta ser de copas → $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

A união será, portanto,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52}$$

$$(A \cup B) = \frac{4 + 13 - 1}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Fonte: Responde aí (2021).

25. (10 minutos) Discussão acerca do conceito de probabilidade condicional, a partir da exibição de *slides* contendo definição e exemplos.

Quadro 84 - Probabilidade condicional

Probabilidade condicional refere-se à probabilidade de um evento ocorrer com base em um evento anterior. Evidentemente, esses dois eventos precisam ser conjuntos não vazios pertencentes a um espaço amostral finito.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Onde:
P(A/B): é a ocorrência do evento A sabendo que B vai ocorrer ou já ocorreu;
P(A $\cap B$): probabilidade de A $\cap B$;
P(B): probabilidade de B.

- Exemplo:
  Uma urna contém 15 bolas numeradas de 1 a 15. Retira-se uma bola ao acaso e vê-se que o número é maior que 6. Qual a probabilidade desse número ser múltiplo de 3?

➢ *Resolução:*
A: $M(3)$: $\{3,\ 6,\ 9{,}12,\ 15\}$
B: > 6: $\{7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$
$P(B)$: $\frac{9}{15}$
$P(A \cap B)$: $\frac{3}{15}$
Calculando-se, por fim, a probabilidade condicional, obtém-se:

$$P(A/B) = \frac{\frac{3}{15}}{\frac{9}{15}}$$

$$P(A/B) = \frac{3}{15} \cdot \frac{15}{9}$$

$$P(A/B) = \frac{45}{135}$$

$$P(A/B) = \frac{1}{3}$$

Fonte: Luiz Paulo Moreira Silva (2021).

26. (5 minutos) Aplicação de um exercício referente ao conteúdo de probabilidade condicional, de modo que, num primeiro momento, os estudantes procurem resolvê-los sozinhos e, só então, as docentes realizem, com o compartilhamento de *slides*, a correção da atividade;

Quadro 85 - Exercício probabilidade condicional

Numa cidade, 400 pessoas foram classificadas, segundo sexo e estado civil, de acordo com a tabela abaixo.

SEXO	SOLTEIRO	CASADO	DESQUITADO	VIÚVO	TOTAL
MASCULINO	10	20	6	4	40
FEMININO	15	25	7	3	50
TOTAL	25	45	13	7	90

Uma pessoa é escolhida ao acaso, calcule a probabilidade de que ela seja solteira, sabendo que ela é do sexo masculino.

- *Resolução:*

$$P(S|M) = \frac{n(S \cap M)}{n(M)} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Fonte: ProEnem (2021).

27.(10 minutos) Apresentação, por meio de *slides*, dos conceitos de eventos independentes, equiprováveis e não equiprováveis, além do fornecimento de exemplos para cada um dos casos.

Quadro 86 - Tipos de eventos

Eventos independentes

Em situações em que dados dois eventos, A e B, a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro, dizemos que A e B são eventos independentes. Assim,

$$P(A|B) = P(A) \; e \; P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B).$$

- Exemplo:

Qual é a probabilidade de, ao lançar um dado comum duas vezes, obter em ambos os lançamentos um número par de pontos?

1º lançamento:

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

2º lançamento:

$$P(B) = \frac{3}{6}$$

Calculando P($A \cap B$), temos:

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B) = \frac{3}{6}.\ \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Eventos equiprováveis

Chamamos de eventos equiprováveis aqueles que apresentam a mesma probabilidade de ocorrência.

- Exemplo:

Consideremos um dado não viciado.

Neste caso, nosso espaço amostral é o conjunto Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Assim,

$$P_{par} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

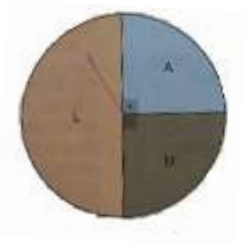
$$P_{ímpar} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Eventos não equiprováveis

Chamamos de eventos não equiprováveis aqueles que não têm a mesma chance de ocorrência.

- Exemplo:

Observe a roleta.



Neste caso, P(L) é maior que P(A) e P(M).

$$P(L) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(M) = \frac{1}{4}$$

Logo, P(L) = 2P(A) e P(L) = 2P(M).

- Exemplo:

Três carros, A, B e C, participam de uma corrida. A tem duas vezes mais chances de ganhar que B, e B tem três vezes mais chance de ganhar que C. Determine as probabilidades de vitória de cada carro.

$$P(A) = 2P(B) = 2(3p) = 6p$$

$$P(B) = 3P(C) = 3p$$

$$P(C) = p$$

Agora, sabendo que $(A) + P(B) + P(C) = 1$, podemos calcular:

$$6p + 3p + p = 1$$

$$10p = 1$$

$$p = \frac{1}{10}$$

E, portanto,

$$P(A) = 6.\frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = 3.\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(C) = \frac{1}{10}$$

Fontes: Adriano Mendonça Souza.

Avaliação: Os alunos serão avaliados com base em suas contribuições durante as discussões promovidas, bem como na correção dos exercícios propostos.

Referências:

EXERCÍCIOS PROBABILIDADE. Disponível em: https://www.respondeai.com.br/conteudo/calculo-de-probabilidades-introducao/exercicios/retirase-carta-baralho-probabilidade-carta-retirada-ser-dama-carta-copas-2838. Acesso em: 20 jul. 2021.

LUIZ, Robson. **Conjuntos**. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/conjunto.htm. Acesso em: 22 jul. 2021.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Arranjo simples**. *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/arranjo-simples.htm. Acesso: 23 jul. 2021.

PREPARA ENEM. **Probabilidade da intersecção de dois eventos**. Disponível em: https://www.preparaenem.com/matematica/probabilidade-interseccao-dois-eventos.htm. Acesso em: 21 jul. 2021.

PROENEM. **Probabilidade condicional**. Disponível em: https://www.proenem.com.br/enem/matematica/probabilidade-condicional/. Acesso em: 20 jul. 2021.

PROVAS UFSC. Disponível em: http://www.vestibular2003.ufsc.br/relatorio/MTM.pdf. Acesso em: 23 jul. 2021.

RODRIGUES, Joaquim. **Matemático**. Disponível em: https://doczz.com.br/doc/746933/an%C3%A1lise-combinat%C3%B3ria. Acesso em: 23 jul. 2021.

SABER MATEMÁTICA. **PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS**. Disponível em: https://sabermatematica.com.br/probabilidade-da-uniao-de-dois-eventos.html. Acesso em: 23 jul. 2021.

SILVA, Andreia Aparecida Costa. **Arranjo simples**. InfoEscola Disponível em: https://www.infoescola.com/combinatoria/arranjo-simples/. Acesso em: 20 jul. 2021.

SILVA, Luiz Paulo Moreira da. **Probabilidade condicional**. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/probabilidade-condicional.htm. Acesso em: 22 jul. 2021.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **EXERCÍCIOS SOBRE ARRANJO SIMPLES**. Brasil Escola. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-arranjo-simples.htm. Acesso em: 22 jul. 2021.

6.2.2 Relato VIII

Relatório Promat – Oitavo Encontro

Aos vinte e quatro de julho do corrente ano, as estagiárias Fernanda Carla de Oliveira, Karla Katrine Pereira Cazarotto e Nadya Beatriz Antunes Barroso, da quarta série do curso de Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel, desempenharam, sob a orientação da professora Pamela Gonçalves, sua oitava prática no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (Promat), que neste ano, ocorre virtualmente, por meio da plataforma *Jitsi*.

Após realizarem a correção do desafio proposto no encontro anterior, ao qual dois dos três grupos enviaram suas resoluções, as estagiárias deram início aos conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade.

Primeiramente, retomaram os conceitos de permutação simples e permutação com repetição. Para tal, elencaram as ideias principais e forneceram um exemplo para cada um dos casos.

Em seguida, propuseram um exercício, na forma de desafio, a fim de introduzir o conteúdo de arranjo simples. Em suma, a questão referia-se a oito competidores disputando uma corrida. Cabia aos estudantes, portanto, determinar de quantas maneiras distintas o pódio poderia ser formado.

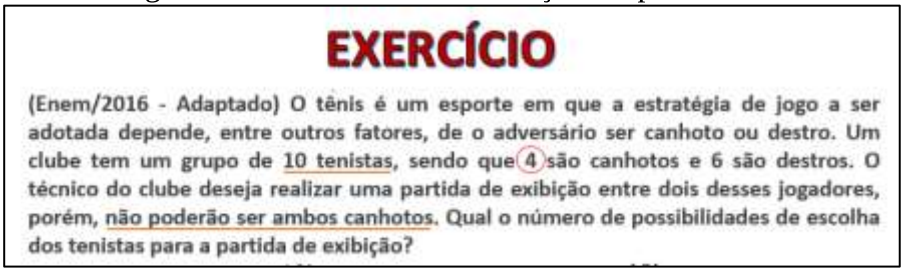
Assim sendo, depois de destinarem um tempo para que os alunos pensassem na resolução, discutiram as respostas obtidas (grande parte dos alunos não apresentou dificuldade) e realizaram a correção do exercício, partindo da exibição de *slides*.

Na sequência, as docentes formalizaram o conceito de arranjo simples, apresentando suas respectivas definição e fórmula, bem como enfatizando que, em problemas do gênero, a ordem sempre importa. Deste modo, trabalharam também com um exemplo e um exercício, os quais, segundo as manifestações dos alunos, foram facilmente compreendidos.

Ainda contando com o emprego de *slides*, as estagiárias deram continuidade ao encontro, trabalhando com a combinação simples. Inicialmente, apresentaram a definição e, por meio de um exemplo acerca da formação de duplas dentre quatro elementos, destacaram que, no caso desse tipo de agrupamento, a ordem não importa. Posteriormente, apresentaram a fórmula que permite calcular a combinação de n elementos tomados de p em p, juntamente com um exemplo de sua aplicação.

Logo após, os estudantes se puseram a resolver um problema advindo do Exame Nacional do Ensino Médio (edição de 2016). Todavia, ao realizarem a correção do exercício, as estagiárias foram informadas de que alguns tiveram dificuldade em compreender o processo. Por este motivo, retomaram o passo a passo da resolução, de modo a esclarecê-lo aos alunos.

Figura 87- Exercício de combinação simples



Fonte: Adaptado de Inep (2016).

Sequencialmente, por meio de uma animação sobre a história da Probabilidade, deram início ao referido conteúdo. Também trataram sobre as aplicações da probabilidade no cotidiano e na própria Matemática, além das definições de espaço amostral, ponto amostral, experimentos determinísticos, estocásticos e aleatórios, eventos equiprováveis e a fórmula que permite calcular a probabilidade de um evento. Logo, alguns exemplos foram apresentados e um exercício proposto. Este último unia os conceitos de espaço amostral, combinação simples e eventos equiprováveis. Contudo, a resolução poderia ser efetuada por meio de um diagrama de árvore.

As probabilidades condicional e da união e interseção de eventos foram abordadas logo na sequência. Lançando mão de *slides*, as docentes puderam exibir as definições e fórmulas utilizadas em seu cálculo. Mas, devido ao limite do tempo, apenas exemplos foram apresentados.

De modo geral, esta, que se configurou sua penúltima experiência no programa, ocorreu de maneira tranquila, sem grandes imprevistos. Hábitos que vêm sendo adotados desde os primeiros encontros, como o apoio do *WhatsApp* durante o compartilhamento dos *slides* – que, por vezes, não são exibidos para todos os alunos – e a consistente comunicação entre as acadêmicas, têm contribuído para que os encontros sejam bastante proveitosos.

6.3 ENCONTRO IX

6.3.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 9° ENCONTRO

(31/07/2021)

Público-Alvo:

Educandos inscritos no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT).

Tempo de execução:

2 horas e 30 minutos,

Conteúdos:

Trigonometria (triângulo retângulo, circunferência e funções), Geometria Analítica (ponto, reta e circunferência), Análise Combinatória (permutação, arranjo e combinação) e Probabilidade (eventos aleatórios, independentes, equiprováveis e não equiprováveis, união e interseção de eventos).

Objetivo Geral:

Objetiva-se que, por meio desta sequência, os alunos mostrem-se capazes de:

- Resolver exercícios envolvendo todos os módulos contemplados no programa.

Objetivos Específicos:

Mediante a execução dos encaminhamentos metodológicos descritos à frente, espera-se que os estudantes possam:

- Distinguir eventos independentes, equiprováveis e não equiprováveis;
- Solucionar questões acerca dos conteúdos supracitados, especialmente aquelas advindas do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e vestibulares.

Recursos Didáticos:

Programa para a edição de *slides*, *WhatsApp*, caderno, lápis e borracha.

Encaminhamento metodológico:

Com a finalidade de atingir os objetivos supracitados, serão desenvolvidas as seguintes atividades:

28.(10 minutos) Apresentação, por meio de *slides*, dos conceitos de eventos independentes, equiprováveis e não equiprováveis, como forma de complementar o conteúdo de Probabilidade iniciado no oitavo encontro;

Quadro 87 - Tipos de eventos

Eventos independentes

Em situações em que dados dois eventos, A e B, a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro, dizemos que A e B são eventos independentes. Assim,

$$P(A|B) = P(A) \; e \; P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A).\; P(B).$$

- Exemplo:

Qual é a probabilidade de, ao lançar um dado comum duas vezes, obter em ambos os lançamentos um número par de pontos?

1º lançamento:

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

2º lançamento:

$$P(B) = \frac{3}{6}$$

Calculando P$(A \cap B)$, temos:

$$P(A \cap B) = P(A).\; P(B) = \frac{3}{6}.\; \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Eventos equiprováveis

Chamamos de eventos equiprováveis aqueles que apresentam a mesma probabilidade de ocorrência.

- Exemplo:

Consideremos um dado não viciado.

Neste caso, nosso espaço amostral é o conjunto Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Assim,

$$P_{par} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P_{ímpar} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Eventos não equiprováveis

Chamamos de eventos não equiprováveis aqueles que não têm a mesma chance de ocorrência.

- Exemplo:

Observe a roleta.

Neste caso, P(L) é maior que P(A) e P(M).

$$P(L) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(M) = \frac{1}{4}$$

Logo, P(L) = 2P(A) e P(L) = 2P(M).

- Exemplo:

Três carros, A, B e C, participam de uma corrida. A tem duas vezes mais chances de ganhar que B, e B tem três vezes mais chance de ganhar que C. Determine as probabilidades de vitória de cada carro.

$$P(A) = 2P(B) = 2(3p) = 6p$$

$$P(B) = 3P(C) = 3p$$

$$P(C) = p$$

Agora, sabendo que $(A) + P(B) + P(C) = 1$, podemos calcular:

$$6\text{p} + 3p + p = 1$$

$$10p = 1$$

$$p = \frac{1}{10}$$

E, portanto,

$$P(A) = 6.\frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = 3.\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(C) = \frac{1}{10}$$

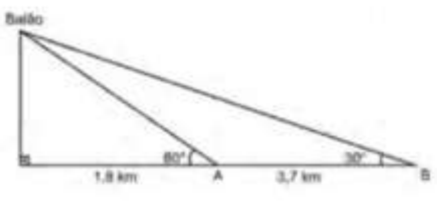
Fontes: Adriano Mendonça Souza.

29. (10 minutos) Divulgação, a partir da exibição da tabela de pontos, do resultado da competição realizada entre os estudantes durante os encontros anteriores;

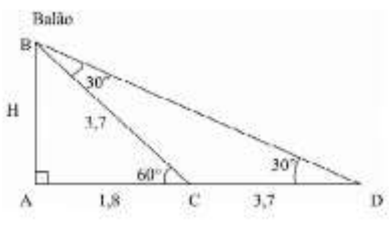
30. (2 horas) Realização do jogo intitulado *Corrida do Mário*, a fim de que os estudantes possam revisar os conteúdos trabalhados ao longo dos oito encontros do Promat. Neste, as equipes (será seguida a mesma divisão das aulas anteriores), através de seus respectivos avatares, se deslocarão pelo tabuleiro à medida em que apresentarem a resolução da questão selecionada por meio de um dos cogumelos numerados. A escolha do cogumelo, bem como as discussões relativas às perguntas do jogo deverão ocorrer nos grupos do *WhatsApp*, de modo que cada docente terá acesso à um deles. Contudo, vale destacar que, além de perguntas, os cogumelos poderão direcionar os estudantes a cartas bônus (garantirão direito de avançar algumas casas, por exemplo) e a cartas ônus (poderão levar ao regresso ou perda do direito de participar de determinada rodada). As questões utilizadas no jogo seguem descritas no quadro 2.

Quadro 88 - Questões do jogo

1) (Enem - Adaptado) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.
   Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60º, a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30º. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?



- *Resolução:*



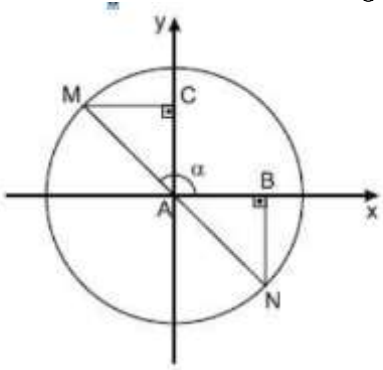
A altura (H) em que o balão se encontra é o cateto oposto ao ângulo de 60° no triângulo retângulo menor. Como temos o cateto adjacente ao ângulo de 60°, que é a distância de 1,8 km, uma boa escolha de razão trigonométrica é a tangente, haja vista que ela relaciona esses dois lados.

$$tan\,60° = \frac{CO}{CA} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{H}{1{,}8} \rightarrow H = \sqrt{3}.1{,}8$$

Usando $\sqrt{3}$ =1,73, teremos:

$$H = 1{,}73 \,.\, 1{,}8 \;\rightarrow\; H = 3{,}114\; km \cong 3{,}1\; km$$

2) (OBMEP) A figura a seguir representa uma circunferência trigonométrica em que MN é diâmetro e o ângulo a mede $5\pi 6$ radianos. A razão entre as medidas dos segmentos AB e AC é:



- *Resolução:*

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180}{6} = \frac{900}{6} = 150°$$

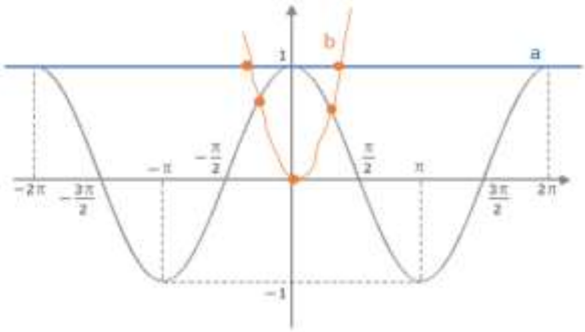
Mas,

$$sen\ 150° = sen\ 30° = \frac{1}{2}$$
$$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

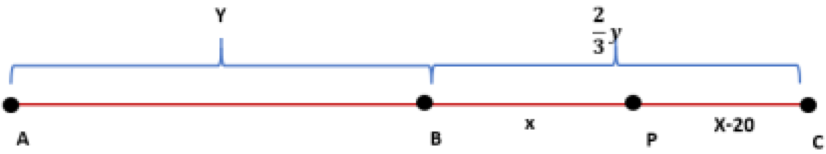
3) (UFRGS) O gráfico da função f, definida por $f(x)$=$cosx$, e o gráfico da função g, quando representados no mesmo sistema de coordenadas, possuem somente dois pontos em comum. Assim, das alternativas abaixo, a que pode representar a função g é:
a) $g(x)$ = $(senx)^2$ + $(cosx)^2$
b) $g(x)$ = x^2
c) $g(x)$ = $2x$
d) $g(x)$ = $logx$
e) $g(x)$ = $senx$

- *Resolução:*
Pela análise, dos gráficos, podemos perceber que a única função que possui dois pontos em comum com f(x) é x^2.



4) Três cidades A, B e C situam-se ao longo de uma estrada reta; B situa-se entre A e C e a distância de B a C e igual a dois terços da distância de A a B. Um encontro foi marcado por 3 moradores, um de cada cidade, em um ponto P da estrada, localizado entre as cidades B e C e a distância de 210 km de A. Sabendo-se que P está 20 km mais próximo de C do que de B, determinar a distância que o morador de B deverá percorrer até o ponto de encontro.

- *Resolução:*



De acordo com a figura acima, temos:

$$d_{AB} = y$$

$$d_{BC} = \frac{2}{3}y$$

$$d_{PC} = x$$

$$d_{PC} = \mathrm{x} - 20$$

$$d_{AP} = y + x$$

Como $d_{BC} = d_{BP} + d_{PC}$, então:

$$d_{BC} = d_{BP} + d_{PC} \rightarrow \frac{2}{3}y = \mathrm{x} + \mathrm{y} - 20 \;\rightarrow y = 3\mathrm{x} - 30$$

Além disso, $d_{AP} = d_{AB} + d_{BP}$.

$$d_{AP} = d_{AB} + d_{BP} \;\rightarrow 210 \;= y + x = \; 3x - 30 + x$$
$$210 \;= 4x - 30$$
$$x = 60\ km$$

5) Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

I. A reta cuja equação é y-3=0 é paralela ao eixo das abscissas.
II. A reta cuja equação é 2x+3=0 é paralela ao eixo das ordenadas.
III. A reta da equação x-y-1=0 passa pelo ponto (0, 1).
IV. Duas retas paralelas têm o mesmo coeficiente linear.
V. Duas retas em um plano que não são paralelas são perpendiculares.

- *Resolução:*
  I. Verdadeira;
  II. Verdadeira;

III. Falsa;
IV. Falsa;
V. Falsa.

6) A equação da reta que passa pelo centro da circunferência $2x^2+2y^2-8x-16y-8=0$ e é paralela à reta $6x-3y-2=0$ é:

- *Resolução:*

Temos que o centro da circunferência é o ponto C(2,4), pois

$$x^2 + 2y^2 - 8x - 16y - 8 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$$
$$(x - \mathbf{2})^2 + (y - \mathbf{4}) = 4$$

Também podemos concluir que o coeficiente angular da reta é 2, uma vez que

$$6x - 3y - 2 = 0$$
$$-3y - 2 = -6\text{x}$$
$$-3y = -6\text{x} + 2$$
$$y = \mathbf{2}\text{x} - \frac{2}{3}$$

Em posse do coeficiente angular e de um ponto pertencente à reta, podemos encontrar sua equação.

$$y = 2\text{x} - \frac{2}{3}$$
$$4 = 2\ .\ 2 + \text{b}$$
$$4 = 4 + \text{b}$$
$$\text{b} = 0$$

E, portanto,

$$y = 2\text{x}$$

7) (Enem PPL – Adaptado) Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição *0* ou *1*. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão. Determine a quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir.

- *Resolução:*

$$2\ .\ 2.\ 2.\ 2. = 2^4 = 16$$

8) (Enem) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:
a) uma combinação e um arranjo, respectivamente
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente
d) duas combinações
e) dois arranjos

- *Resolução:*

No primeiro caso, a ordem não importa. Logo, se trata de uma combinação. No segundo caso, a ordem faz diferença e, por isso, caracteriza-se um arranjo.

9) (Enem – Adaptado) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suina

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, qual é a probabilidade de ela ser portadora da doença crônica?

- *Resolução:*

$$P(A) = \frac{22}{200} = \frac{11}{100} = 11\%$$

10) (UFRN) Determine o seno, cosseno e tangente do menor ângulo do triângulo retângulo cujos catetos medem 9 cm e 12 cm.

- *Resolução:*

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$a^2 = 9^2 + 12^2$$
$$a^2 = 81 + 144$$
$$a^2 = 225$$
$$a = \sqrt{225}$$
$$a = 15$$

Assim,

$$sen = \frac{co}{h} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$cos = \frac{ca}{h} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\tan = \frac{co}{ca} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

11) Qual a medida, em radianos do ângulo de 100º?

- *Resolução:*

$$180° \text{ ——————— } \pi$$
$$100° \text{ ——————— } x$$

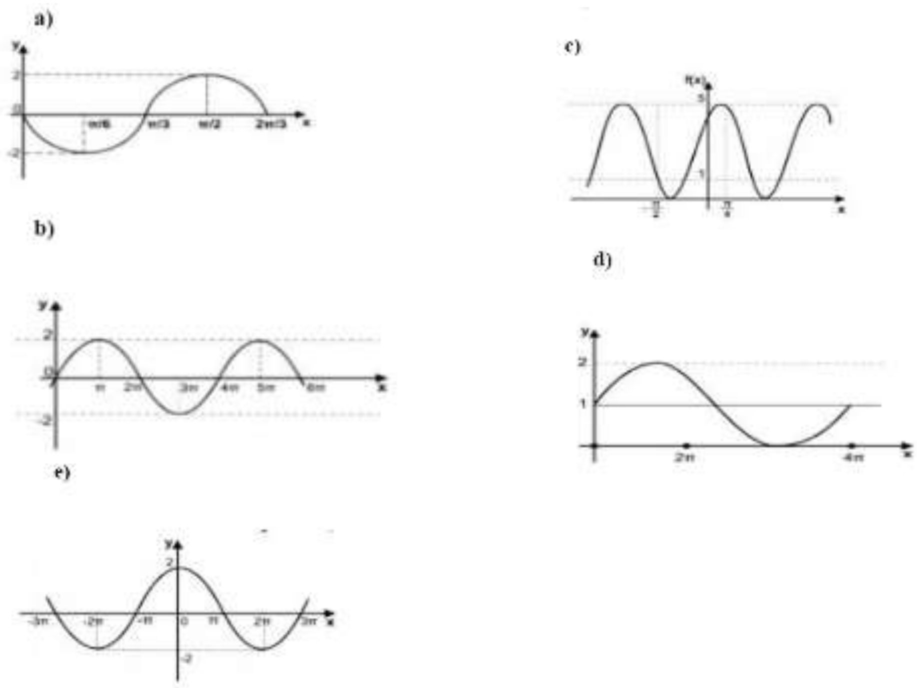
$$180x = 100\pi$$

$$x = \frac{100\pi}{180}$$

$$x = \frac{10\pi}{18}$$

$$x = \frac{5\pi}{9}$$

12) (UPE**)** Qual dos gráficos a seguir representa a função $f(x) = -2\ sen\ 3x$?



- *Resolução:*
  De acordo com as características da função seno, o gráfico correto é aquele correspondente a alternativa a.

13) Calcule o valor de **x** para que os pontos A (**x**, 5), B (-2,3) e C (4,1) sejam colineares.

- *Resolução:*

$$\begin{bmatrix} x & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x & 5 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{matrix}$$

-12 -x 10   3x 20 -2

$$d = -12 - x + 10 + 3x + 20 - 2$$

$$d = 2x + 16$$

Para que os pontos estejam alinhados, o determinante da matriz formada por suas coordenadas deve ser zero.

$$2x + 16 = 0$$

$$2x = -16$$

$$x = -\frac{16}{2}$$

$$x = -8$$

14) Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A (0, 1) e B (6, 8).

- *Resolução:*

$$m = \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)} \rightarrow m = \frac{(8-1)}{(6-0)} = \frac{7}{6}$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \rightarrow \ y - 1 = \frac{7}{6} \cdot (x - 0)$$
$$y - 1 = \frac{7}{6}x \rightarrow \ y = \frac{7}{6}x + 1$$

15) Determine a equação da circunferência com centro no ponto A (1,-2) e que passa pelo ponto P (2,3).

- *Resolução:*

Primeiramente, vamos descobrir o raio da circunferência dada.

$$d_{AP} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-2))^2}$$
$$d_{AP} = \sqrt{(1)^2 + (5)^2}$$
$$d_{AP} = \sqrt{1+25}$$
$$d_{AP} = \sqrt{26}$$

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$$C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{26}\,)^2$$
$$C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 26$$

16) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Quantos séculos, aproximadamente, serão necessários para esgotar todas as sequências dessas músicas.

- *Resolução:*

Trata-se de um problema de permutações simples, ou seja, calcular o número de permutações simples de 10 elementos.

P_{10} = 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1

Portanto serão necessários 10! dias, para esgotar todas as possibilidades. Vamos converter esse número em anos e, para isto vamos dividir por 365 dias.

$$\frac{10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{365} = \frac{3.628.800}{365} \cong 9.\ 941\ anos$$
$$\frac{9.941}{100} \cong 99{,}41 \cong 100\ anos = 1\ século$$

17) O número de triângulos que podem ser traçados utilizando-se 12 pontos de um plano, não havendo 3 pontos em linha reta, é:

- *Resolução:*

Considerando os pontos

$$A - B - C - D - E - F - G - H - I - J - K - L$$

e notando, por exemplo, que $ABC = BCA = CAB$, temos:

$$c_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \rightarrow \ c_{12,3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!}$$

$$c_{12,3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3!\,9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1320}{6} = 220$$

18) Numa cidade, 400 pessoas foram classificadas, segundo sexo e estado civil, de acordo com a tabela abaixo:

SEXO	SOLTEIRO	CASADO	DESQUITADO	VIÚVO	TOTAL
MASCULINO	10	20	6	4	40
FEMININO	15	25	7	3	50
TOTAL	25	45	13	7	90

Uma pessoa é escolhida ao acaso, calcule a probabilidade de que ela seja solteira, sabendo que ela é do sexo masculino.

- *Resolução:*

$$P(S|M) = \frac{n(S \cap M)}{n(M)} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Fontes: Adilson Longen; Fabio Martins de Leonardo; Fuvest; Gelson Iezzi; Inep; Manoel Paiva; Proenem; Stoodi; UFRGS; UFRN (*apud* Ptdocz); UPE (*apud* Brasil Escola).

Avaliação:

Os alunos serão avaliados com base em sua participação no jogo *Corrida do Mário*.

Referências:

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

EXERCÍCIOS SOBRE PROBABILIDADE CONDICIONAL. Disponível em: https://www.proenem.com.br/enem/matematica/probabilidade-condicional/. Acesso em: 30 jul. 2021.

EXERCÍCIOS SOBRE TRIGONOMETRIA. Disponível em: https://www.stoodi.com.br/exercicios/cefet-mg/2012/questao/cefet-mg-2012-a-flgura-abaixo-representa-uma-circunferencia-tngonometrlca-em/. Acesso em: 30 jul. 2021.

EXERCÍCIOS SOBRE TRIGONOMETRIA. https://ptdocz.com/doc/1187580/lista-2-1col.-2bim---objetivo-s%C3%A3o-carlos. Acesso em: 29 jul. 2021.

IEZZI, Gelson. **Matemática**: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática**. Vol. 3. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LONGEN, Adilson. **Matemática**: padrões e relações. São Paulo: Editora do Brasil, 2016.

PAIVA, Manoel. MATEMÁTICA PAIVA. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVAS FUVEST. Disponível em: https://acervo.fuvest.br/fuvest/2004/. Acesso em: 30 jul. 2021.

PROVAS UFRGS. Disponível em: http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/baixar-provas. Acesso em: 30 jul. 2021.

QUESTÕES DE VESTIBULARES. Disponível em: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads/universidade-pernambuco.htm. Acesso em: 29 jul. 2021.

SOUZA, Adriano Mendonça. **Probabilidade**. Disponível em: http://w3.ufsm.br/adriano/aulas/prob/tprob.pdf. Acesso em: 30 jul. 2021.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**. São Paulo: FTD, 2016.

6.3.2 Relato IX

Relatório Promat – Nono Encontro

Aos trinta e um dias do mês de julho do corrente ano, as estagiárias Fernanda Carla de Oliveira, Karla Katrine Pereira Cazarotto e Nadya Beatriz Antunes Barroso, da quarta série do curso de Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel, desempenharam, sob a orientação da professora Pamela Gonçalves, sua última prática no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (Promat), que neste ano, ocorre virtualmente, por meio da plataforma *Jitsi*.

O encontro teve início por meio da finalização do conteúdo de Probabilidade. Como, na semana anterior, não foi possível tratar de eventos independentes, equiprováveis e não equiprováveis, as docentes discutiram sobre o assunto, fornecendo exemplos para cada um dos casos. Para tal, realizaram o compartilhamento de *slides.*

Com os conteúdos programados devidamente concluídos, as estagiárias finalizaram a competição que vinha sendo fomentada desde o terceiro encontro, exibindo, aos alunos, a tabela de pontuações. Assim, informaram que dariam início a um novo jogo, desta vez contendo perguntas referentes a todos os módulos trabalhados no programa.

Quadro 89 - Conteúdos contemplados

Encontro	**Conteúdos**
1º	Trigonometria no triângulo retângulo
2º	Trigonometria na circunferência
3º	Funções trigonométricas
4º	Estudo do ponto
5º	Estudo da reta

6º	Estudo da circunferência
7º	Princípio Fundamental da Contagem e Permutação
8º	Arranjo, Combinação e Probabilidade

Fonte: As autoras.

Ainda em seus grupos, os estudantes, que tiveram seu placar zerado, foram apresentados à dinâmica da atividade: o jogo, que tinha como pano de fundo o Super Mário e sua turma, trazia cogumelos numerados. Ao escolher um deles, as equipes poderiam se deparar com um bônus (como avançar casas), um ônus (regressar casas, por exemplo) ou uma questão, cujo acerto também garantia o avanço de casas. Se consagraria vencedora a equipe que primeiro chegasse ao castelo.

Tal como nos demais encontros, a comunicação entre os grupos se deu por meio do *WhatsApp*. Através do aplicativo, os alunos discutiam as respostas e escolhiam o cogumelo da rodada.

Definidos os avatares de cada equipe, o jogo foi iniciado. É válido destacar que, embora as questões tivessem que ser prioritariamente respondidas pelo grupo responsável por sua seleção, os demais também poderiam buscar solucioná-las, para o caso em que o primeiro não obtivesse sucesso. Deste modo, todos os estudantes mantiveram-se engajados durante a realização da atividade.

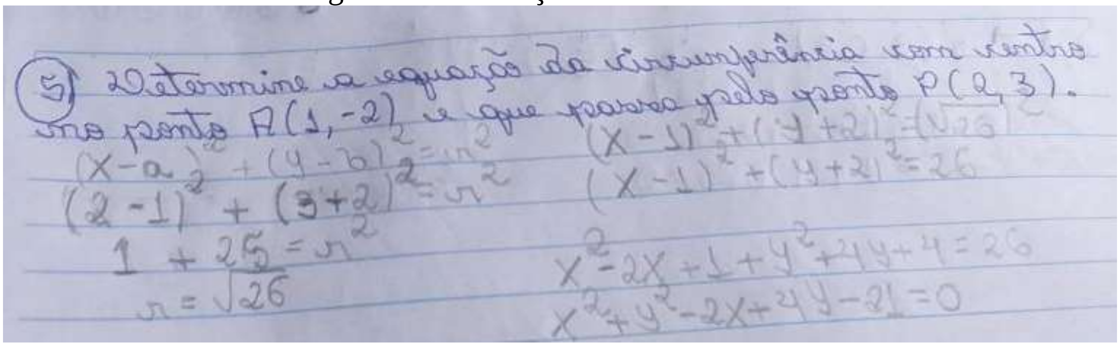
No primeiro exercício, os discentes mostraram-se um pouco perdidos com relação à dinâmica e ao conteúdo, pois nenhuma equipe foi capaz de resolvê-lo dentro do tempo estipulado. Para recobrar sua memória, as acadêmicas realizaram, por meio de *slides* animados, a resolução deste. Assim, além de compreenderem o problema, os alunos puderam se familiarizar com o formato das perguntas escolhidas pelas docentes – em sua maioria, exercícios de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio.

Nas rodadas seguintes, os estudantes foram se saindo muito bem, ainda que, em certos momentos, as estagiárias sentiram a necessidade de discutir a resolução com a turma, a fim de esclarecer algumas dúvidas.

Além disso, outra regra foi criada: para ter sua resposta validada, os grupos precisariam justificá-la, isto é, contar, ainda que brevemente, os passos de sua resolução e/ou o conteúdo empregado.

A princípio, alguns alunos reclamaram que, com a pressão do jogo, era muito difícil digitar, no grupo do *WhatsApp*, suas justificativas a tempo. Contudo, na medida em que o jogo foi avançando, muitos optaram por enviar fotos da resolução efetuada em seus cadernos.

Figura 88- Resolução enviada



Fonte: Acervo das autoras.

Próximo ao fim do encontro, uma das equipes venceu o jogo. As estagiárias aproveitaram, então, para parabenizar todos os participantes, passar alguns recados quanto à certificação e, por fim, despedir-se de todos. Os alunos, por sua vez, se manifestaram pelo *chat* da plataforma dizendo que sentiriam falta dos encontros semanais e que a experiência no programa foi bastante proveitosa.

De fato, fazer parte do Promat trouxe, às estagiárias, uma bagagem de conhecimentos relativos à prática docente, haja vista que se encontravam envolvidas do planejamento à execução das aulas. Ademais, pelo fato de o programa ter ocorrido de modo remoto, puderam vivenciar uma experiência inédita, ao passo em que, dia após dia, buscavam se adequar ao formato em que estavam inseridas, a fim de garantir a aprendizagem dos estudantes.

No mais, descobriram na competição criada, uma valiosa maneira de manter os alunos engajados, especialmente pelo fato de que, no ensino à distância, a relação professor-aluno e a percepção das reações dos estudantes quanto aos conceitos trabalhos são prejudicadas.

Neste último encontro, por exemplo, a participação dos discentes foi praticamente unânime, tanto nos grupos do *WhatsApp*, quanto no *chat* da plataforma. Além disso, as próprias acadêmicas se mostraram bastante animadas durante a realização da atividade, o que, certamente, refletiu no engajamento da turma, como um todo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Promat é um projeto do curso de Licenciatura em Matemática destinado aos alunos da rede pública estadual de ensino, a fim de ministrar-lhes conteúdos de Matemática da Educação Básica, como forma de os auxiliarem no ingresso ao Ensino Superior.

No entanto, o programa que vinha ocorrendo presencialmente, aos sábados no *campus* de Cascavel, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, precisou ser reformulado. Passou a ser ofertado, também aos sábados, porém de modo remoto, com uma carga horária reduzida (eram 4 horas semanais e passou a ser 2,5 horas semanais), com o objetivo de continuar atendendo os estudantes, mesmo diante das dificuldades impostas pela pandemia ocasionada pelo coronavírus.

À distância, organizamos nossos planos e ministramos aulas em nove encontros (na modalidade presencial, eram dez encontros) semanais de duas horas e trinta minutos cada. Embora tenha sido necessário modificar os materiais que já havíamos preparado, a realização do programa nesse formato foi muito produtiva, especialmente por permitir uma vivência de experiências que, em se tratando do ensino presencial, não seriam possíveis. A necessidade de diversificar e fazer com que os alunos interagissem conosco, nos fez repensar a nossa prática docente, a forma de organizar os conteúdos e, principalmente, a percepção sobre o aprendizado desses alunos.

Por meio da prática no Promat, pudemos interagir com estudantes de diferentes localidades do nosso estado, mesmo que visualmente não tivéssemos contato, eles participavam pelo *chat* e alguns se manifestavam via áudio.

No processo de planejamento e preparação das aulas, percebemos que ampliamos consideravelmente nossos conhecimentos relativos ao uso de tecnologia em sala, assim como aprendemos a contornar imprevistos (como inconstâncias nas conexões, o uso da plataforma *jitsi*, não conseguir visualizar as expressões faciais dos alunos etc.).

No entanto, o planejamento das aulas, para essa modalidade remota, levava muito mais tempo do que a preparação para uma aula presencial, pois neste formato, como cada aluno está em seu acesso, dificilmente havia interrupções, como as famosas “conversas paralelas", e isso tornava possível abordar vários assuntos em uma mesma aula. Nas resoluções de exercícios, não conseguíamos precisar se todos estavam fazendo, e se àqueles que não estavam fazendo, se era ocasionado por não saber ou talvez por não querer fazer. Outra situação de instabilidade, foi a redução do nosso grupo, éramos um quarteto, e finalizamos em trio.

Em todo o processo da realização deste projeto vinculado ao estágio, consideramos que tivemos um grande crescimento pedagógico, humano e social. Conseguimos resolver situações e administrar planejamentos que nunca pensávamos ser possível de ser realizado. Foi um processo moroso, mas fundamental para a nossa formação docente e também para entendermos como a prática docente é adaptativa e dinâmica.

REFERÊNCIAS.

ALVES, Diego. **A trigonometria do ensino fundamental para o ensino médio**: uma proposta didática. 2017. 68 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017.

BUENO, Daisy Luci Regiani. **Aprendendo em que situações pode-se usar o ponto estudado na geometria analítica**. 2013. 2 v. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Paraná - Unespar – Campus de Paranavaí, Santa Isabel do Ivaí, 2013.

CADERNO DE EXERCICIOS – **OBEMEP**. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/h33tf5r3nqgoc.pdf. Acesso em: 27 jul. 2020.

CASA DAS QUESTÕES. **Trigonometria no Triângulo Retângulo, Geometria plana**. Disponível em: https://acasadasquestoes.com.br/simulado/matematica/trigonometria-notrianguloretangulo#.WypXPqdKjIU . Acesso em: 25 jun. 2020. TADEU, Walter. Exercícios do Ensino Médio. Disponível em: http://professorwaltertadeu.mat.br/exerciciosEM2014.html . Acesso em: 25 jun. 2020.

CERRI, Cristina; DRUCK, Iole de Freitas. **Combinatória sem fórmulas**. 2019. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20192/mat1514/L3.pdf. Acesso em: 7 nov. 2020.

DANTAS, Fábio Alvaro, **razões trigonométricas na circunferência**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ca7jftnh. Acesso em: 23 abr. 2021.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilce. **Matemática e ciência e aplicações**: Volume 2 Ensino médio. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA ANALITICA. Disponível em: https://professorwaltertadeu.mat.br/ProfEmanuelGeoAnPonto2016.doc. Acesso em: 27 jul. 2020.

EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA ANALITICA. Disponível em: https://professorwaltertadeu.mat.br/ProfEmanuelGeoAnPonto2016.doc. Acesso em: 27 jul. 2020.

EXERCÍCIOS PFC. Disponível em: https://www.vestmapamental.com.br/wp-content/uploads/2020/04/Exercicios-5.pdf. Acesso em: 14 jul. 2021.

EXERCÍCIOS PROBABILIDADE. Disponível em: https://www.respondeai.com.br/conteudo/calculo-de-probabilidades-introducao/exercicios/retirase-carta-baralho-probabilidade-carta-retirada-ser-dama-carta-copas-2838. Acesso em: 20 jul. 2021.

EXERCÍCIOS SOBRE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS - DESCOMPLICA. Disponível em: https://descomplica.com.br/d/vs/matematica/trigonometria/funcoestrigonometricas/aula/exercicios de-funcoes-trigonometricas-seno-cosseno-e-tangente/ . Acesso em: 25 jun. 2020.

EXERCÍCIOS SOBRE PROBABILIDADE CONDICIONAL. Disponível em: https://www.proenem.com.br/enem/matematica/probabilidade-condicional/. Acesso em: 30 jul. 2021.

EXERCÍCIOS SOBRE TRIGONOMETRIA. Disponível em: https://www.stoodi.com.br/exercicios/cefet-mg/2012/questao/cefet-mg-2012-a-flgura-abaixo-representa-uma-circunferencia-tngonometrlca-em/. Acesso em: 30 jul. 2021.

EXERCÍCIOS SOBRE TRIGONOMETRIA. https://ptdocz.com/doc/1187580/lista-2-1col.-2bim---objetivo-s%C3%A3o-carlos. Acesso em: 29 jul. 2021.

GRAFICO DE FUNÇÕES: SENO, COSSENO E TANGENTE - Dinâmica 6. 1ª Série | 4º Bimestre. DISCIPLINA. Série. CAMPO. CONCEITO. Matemática. 1a do Ensino Médio. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/recurso/12540. Acesso em: 25 jun. 2020.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilce. **Matemática e ciência e aplicações**: Volume 3. Ensino médio. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

IEZZI, Gelson. LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **CONEXÕES COM A MATEMÁTICA**. 2. Paulo: Moderna, 2013.

IEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática**. Vol. 3. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LONGEN, Adilson. **Matemática: padrões e relações**. São Paulo: Editora do Brasil, 2016.

LUIZ, Robson. **Conjuntos. Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/conjunto.htm. Acesso em: 22 jul. 2021.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Arranjo simples**. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/arranjo-simples.htm. Acesso: 23 jul. 2021.

PAIVA, Manoel. **MATEMÁTICA PAIVA**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PREPARA ENEM. **Probabilidade da intersecção de dois eventos**. Disponível em: https://www.preparaenem.com/matematica/probabilidade-interseccao-dois-eventos.htm. Acesso em: 21 jul. 2021.

PROENEM. **Probabilidade condicional**. Disponível em: https://www.proenem.com.br/enem/matematica/probabilidade-condicional/. Acesso em: 20 jul. 2021.

PROVAS FUVEST. Disponível em: https://acervo.fuvest.br/fuvest/2004/. Acesso em: 30 jul. 2021.

PROVAS UFRGS. Disponível em: http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/baixar-provas. Acesso em: 30 jul. 2021.

PROVAS UFSC. Disponível em: http://www.vestibular2003.ufsc.br/relatorio/MTM.pdf. Acesso em: 23 jul. 2021.

QUESTÃO 175 – ENEM. Disponível em: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2013/segundo-dia/nos-ultimos-anos-televisao-tem-passado-por-uma-verdadeira-revolucao-em-termos-de-qualidade/. Acesso em: 27 jul. 2020.

QUESTÕES DE VESTIBULARES. Disponível em: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads/universidade-pernambuco.htm. Acesso em: 29 jul. 2021.

RODRIGUES, Joaquim. **Matemático**. Disponível em: https://doczz.com.br/doc/746933/an%C3%A1lise-combinat%C3%B3ria. Acesso em: 23 jul. 2021.

SABER MATEMÁTICA. PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS. Disponível em: https://sabermatematica.com.br/probabilidade-da-uniao-de-dois-eventos.html. Acesso em: 23 jul. 2021.

SILVA, Andreia Aparecida Costa. **Arranjo simples**. InfoEscola Disponível em: https://www.infoescola.com/combinatoria/arranjo-simples/. Acesso em: 20 jul. 2021.

SILVA, Eriky César Alves da. **O jogo senha e o princípio fundamental da contagem:** uma aplicação no ensino médio. 2018. 74 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 028. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/25552/1/ErikyCesarAlvesDaSilva_DISSERT.pdf. Acesso em: 06 nov. 2020.

SILVA, Luiz Paulo Moreira da. **Probabilidade condicional**. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/probabilidade-condicional.htm. Acesso em: 22 jul. 2021.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Exercícios sobre arranjo simples**. Brasil Escola. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-arranjo-simples.htm. Acesso em: 22 jul. 2021.

SOUZA, Adriano Mendonça. **Probabilidade**. Disponível em: http://w3.ufsm.br/adriano/aulas/prob/tprob.pdf. Acesso em: 30 jul. 2021.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**. São Paulo: FTD, 2016.

TOUR TRIGONOMÉTRICO. Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/trigtour/latest/trig-tour_pt_BR.html. Acesso em: 25 jun. 2020.